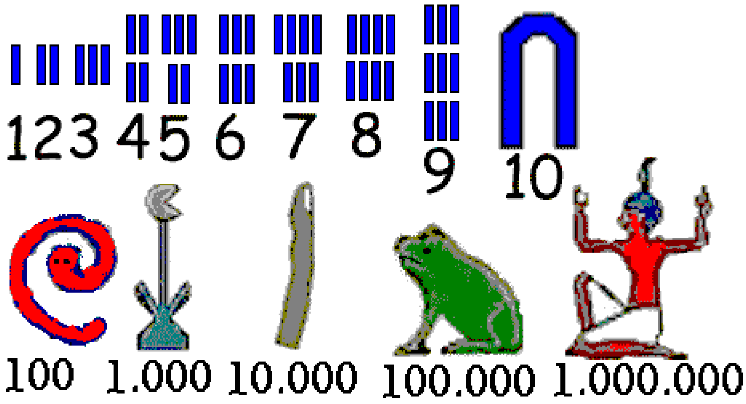


NÚMEROS RACIONALES EN EL ANTIGUO EGIPTO

Lic. Israel Coronado Huanaco

Tesis de Maestria en matemática para profesores

Departamento de matemática

2015

Orientador:

António José de Oliveira Machiavelo
Professor Auxiliar

Departamento de matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

U.PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ______/______/_________

AGRADECIMIENTO

Para todos aquellos que de alguna manera, contribuyó para que se realizará este trabajo sea posible.
Al Prof. António José de Oliveira Machiavelo profesor de la Maestría, por su asesoría en el desarrollo de este trabajo y por sus sugerencias y correcciones en la escritura de esta tesis.
A mis profesores y profesoras de la Maestría por su ejemplar muestra de disciplina y trabajo. A mis amigos y amigas de maestría por su apoyo desinteresado en la realización de mis estudios. Al Prof. Jorge Carvalho, Director del departamento de Matemática de la facultad de ciencia y compañeros maestros, gracias por su colaboración.

DEDICATORIA

A quien yo dedico:

A mis padres Juan y Eugenia, quienes han sido mi apoyo y fortaleza, gracias por creer en mí, ya que siempre estuvieron impulsándome en los momentos más difíciles de mi carrera, admiro su fortaleza y el orgullo que sienten por mí, fue lo que me hizo ir hasta el final. Y también a mis hermanos, quienes con su amor supieron apoyarme siempre.

RESUMEN

En esta tesis se presenta una descripción detallada de la primera parte del papiro Rhind, y se expone algunos resultados en fracciones unitarias, también llamadas *fracciones egipcias.*

Después de describir algo de la historia del antiguo Egipto, se explica el sistema de numeración utilizado en el papiro Rhind, y cómo las operaciones aritméticas se realizan en el mismo.

A continuación damos una descripción minuciosa y la traducción de la llamada tabla de la duplicación, la parte introductoria del papiro (que no es en realidad una tabla, pero algo equivalente a una), y presentamos algunos de los métodos que los historiadores de las matemáticas creen que es plausible que subrayan los cálculos hechos por el escriba. Finalmente se presenta un algoritmo que data de Fibonacci para escribir cualquier fracción como una suma de fracciones egipcias, y la conjetura de Erdös y Straus sobre estas fracciones.

ABSTRACT

In this thesis we present a detailed description of the first part of the Rhind papyrus, and expound some results on unit fractions, also called *egyptian fractions*.

After describing some of the history of Ancient Egypt, we explain the numeration system used in the Rhind papyrus, and how the arithmetical operations are therein performed.

We then give a thorough description and translation of the so-called duplication table, the introductory part of the papyrus (which is not actually a table, but something equivalent to it), and present some of the methods that historians of mathematics think it is plausible to underlie the computations made by the scribe. Finally we present an algorithm that dates back to Fibonacci to write any fraction as a sum of egyptian fractions, and a conjecture of Erdös and Straus on these fractions.

Palabras Claves

Palabras Claves: Papiro de Rhind, escritura hierático, escritura jeroglífico, fracciones unitarias, sistema de numeración, algoritmo de Fibonacci, conjectura de Erdös-Straus.

ÍNDICE

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La historia de la matemática egipcia está indudablemente asociada a los sistemas de numeración, al desarrollo del concepto de número y las prácticas de cálculo y medición. El objetivo de esta tesis es hacer una descripción detallada de la primera parte del papiro de Rhind, analizar algunos resultados aritméticos contenidos en él, así como estos han sido interpretados y como las fracciones son reducidas en suma de fracciones unitarias.

Este trabajo está dividido en 6 capítulos que hace un análisis descriptivo de la primera parte del papiro de Rhind,los sistemas de numeración jeroglíficos y hieráticos y las fracciones unitarias egipcias. Y en este trayecto, por algunas de las fascinantes etapas del pensamiento matemático, podremos constatar que el descubrimiento de la numeración de posición escapó a la mayoría de los pueblos de la historia (Ifrah, 1994).

El capítulo II de este trabajo está dedicado a un breve resumen de la historia de la civilización del antiguo Egipto basado en gran medida en...... Tales como la resolución de problemas surgidos de las necesidades prácticas de la vida cotidiana de los egipcios, en la mayoría de los casos relacionados con la medición de tierras. Además el primer descubrimiento de las escrituras en la piedra Rosetta.

En Capítulo III vamos ver los documentos matemáticos escritos en hierático que sustentan, la civilización egipcia. Como los matemáticos egipcios abordaron los números fraccionarios para representar en suma de fracciones unitarias. Así como el papiro de Rhind, papiro de Moscú, papiro de Berlín etc.

En capítulo IV se aborda el sistema de numeración de los egipcios (jeroglífico, hierático), y los métodos utilizados en la multiplicación, división y operaciones matemáticas con fracciones para las representaciones en suma de fracciones unitarias.

En capítulo V se centra principalmente sobre la traducción de la primera parte del papiro de Rhind, que muchos historiadores trataron de traducir durante muchos años. También abordamos los posibles métodos utilizados por los escribas en la elaboración de la llamada "tabla".

En capítulo VI se presenta un algoritmo para escribir cualquiera fracción de forma $\frac{p}{n}$ como suma de fracciones unitarias que remonta a Fibonacci, y también una conjetura, la conjetura de Erdös-Straus, que afirma que todas las fracciones de la forma $\frac{4}{n}$ se pueden escribir como suma de no más de tres fracciones unitarias.

Capítulo 2

EGIPTO Y SU HISTORIA

2.1. La historia

El río Nilo, segundo río más largo del mundo con una longitud de 6,756 kilómetros, solo superado por el Amazonas en poco más de 300 kilómetros, recorre el continente africano formando cataratas desde las montañas del centro-oriental hasta el mar mediterráneo formando deltas. Los Griegos llamaron Nilo, pero para los habitantes en las orillas era simplemente “El Rio”.

Figura 2.1: Mapa del antiguo Egipto

El origen del río Nilo fue un misterio de muchos siglos. Según la opinión del militar y procurador imperial romano **Plinio el Viejo,** su origen estaba en las montañas de la baja Mauritania. En el año 1858 el explorador británico **John Hanning Speke** llegó a la orilla sur de una inmensa masa de agua y pensó que había encontrado el origen del Nilo. Llamó Lago Victoria en honor a la reina de Gran Bretaña.

A partir del año 600 A.C.E., los griegos viajaron con el objetivo de saber y conocer a Egipto. Entre ellos, Heródoto quien dió la primeras noticias sobre la civilización antigua basándose en sus propias observaciones y testimonios ajenos. Él fue criticado por algunos estudiosos posteriores por no dar datos exactos. Sin embargo su obra se conertió en fuente despensable para los historiadores del mundo antiguo, y Cicerón llegó a decir de él que era "el padre de la historia".

Heródoto escribió que "Egipto es un regalo del Nilo", porque el Nilo fertilizaba las tierras, proporcionaba papiro y pescado, y era también una eficaz vía de transporte para mercancías y personas.

Estrabón, quien recorrió el Nilo hasta la primera catarata, dejó recogida en una geografía todo lo que aprendió en sus viajes. Ahora bien, ni Herodoto, ni Diodoro, ni Estrabón entendían la antigua escritura egipcia y en consecuencia no pudieron basarse en documentos escritos. Aludieron a ella como una incomprensible escritura de imágenes y la llamaron jeroglífica refiriéndose a su carácter religioso. El Sacerdote Manetón escribió detalladamente la historia de Egipto al rededor del año 280 A.E.C., cuando el país estaba gobernado por la dinastía Griega de los Ptolomeos. Desde entonces y hasta que se supieron leer los jeroglíficos, las más valiosas fuentes para conocer el antiguo Egipto permanecerían secas durante mucho tiempo. Horapolo, un gramático del siglo V A.C. compuso un tratado sobre la escritura jeroglífico considerándola ideográfica.

El capitán Pierre François Bouchard del ejército francés comandado por Napoleón Bonaparte encontró una piedra negra, parte de una estela de granodiorita con una inscripción en tres lenguas y tres escrituras distintas: Griego antiguo, jeroglífico y demóstico. Los Europeos la llamaron Rosetta y actualmente se llama "La Piedra de Rosetta". La Rosetta fue depositada por Bouchard en el instituto de Egipto que el propio Napoleón había creado. Napoleón fue derrotado por los ingleses quienes incautaron los hallazgos por los franceses, así La Piedra Rosetta fue llevado al Museo Británico.

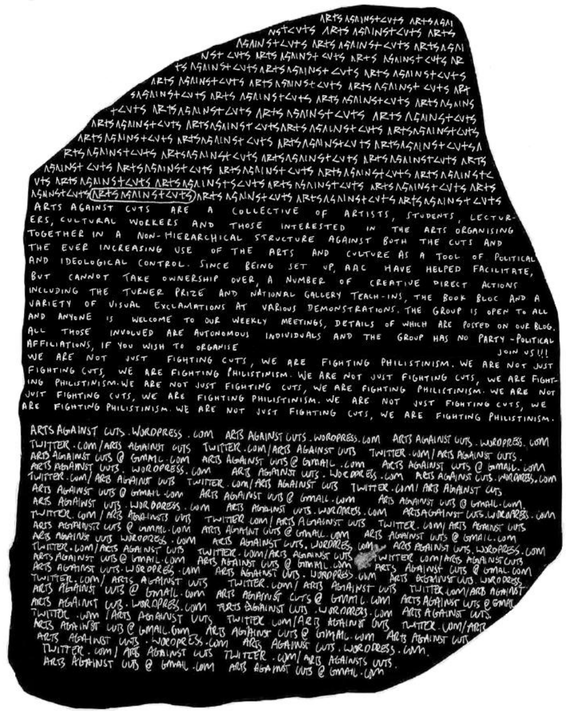


Figura 2.2: Piedra de Rosetta

La piedra de Rosetta, había sido descubierto en 1799 por la expedición de Napoleón Bonaparte. Esa pieza grande llamada Rosseta que se encuentra en el antiguo puerto de Alejandría que contenía una escritura en tres escrituras distintas: Griego antiguao, demótico y jeroglífico.cite[p. 8]BOYER,

Jean François Chambollion desde muy niño mostró su habilidad y su enorme inteligencia por los idiomas. A los once años inicia sus estudios en latín y el griego, desde entonces se dedicó completamente al estudio de los idiomas, principalmente los relacionados con la escritura del antgou egipcio. A los dieciséis años dominaba más de doce idiomas. Su mayor preocupación fue el estudio de la Piedra Rosetta. Luego más tarde empieza el trabajo de desciframiento definitiva de los jeroglíficos. En 1822 escribió una carta al secretario de la academia de inscripciones de París dando cuenta de sus descubrimientos y dos años más tarde publicó su obra *"Resumen del sistema jeroglífico de los antiguos egipcios"*.

Gracias a Champollion la escritura jeroglífica se hizo accesible y los textos egipcios dejaron de ser un misterio. El egiptólogo Alemán Karl Richard Lepsius, quién vivió entre los años 1810 y 1884, descubrió el "Decreto de Canopus", un documento bilingüe en griega y demótico que complementa muy bien a la Piedra Rosetta para la comprensión del lenguaje jeroglífico.

2.1.1. Periodo Arcaico

La historia de antiguo Egipto se divide en varios pediodos, el primero de las cuales se conoce como el periodo arcaico. Este periodo se inicia en el año (3100 - 2700 A.E.C.). Es el comienzo de la historia dinástica del antiguo egipto con la política unificadora y es el inicio de los mitos religiosos creacionistas.

En el siglo III A.E.C. un sacerdote egipcio, Manetón, agrupa la larga línea de faraones desde Menes hasta su tiempo en 30 dinastías, un sistema todavía en uso hoy en día. Él optó por comenzar su historia oficial con el rey denominado “Meni” (o Menes en griego) que se cree que habría unido los dos reinos de alto y bajo Egipto (alrededor de 3200 A.E.C.). Así Menes es el primer rey la primera dinastía quien unificó ambas tierras para gobernar alto Egipto y bajo Egipto. Mandó construir una ciudad cercana a las fronteras llamada Jikupta (significa Egipto) para controlar ambos territorios.

> Durante un tiempo el Egipto posterior al 3000 A.E.C. fue realmente el Egipto histórico, aun cuando aceptemos que Manetón escribió una historia necesariamente incompleta, y que pueda haberla escrito desde un punto de vista parcial, como egipcio que era, y sacerdotal. Por desgracia, sin embargo, la historia de Manetón y las fuentes que utilizó no han sobrevivido. El «Egipto histórico» se hundió en las tinieblas de la ignorancia humana tras la caída del Imperio Romano, y así permaneció durante catorce siglos. [Asimov, 1993, p. 14]

El periodo que cubre las dos primeras dinastías de unos cuatro siglos, suele llamarse Arcaico y sobre su historia se conoce poco. En esta época el rey fue un símbolo de bienestar a los ojos del pueblo, hasta convertirse en un dios encarnado en forma humana cuya misión principal consistía en garantizar el equilibrio divino frente a las fuerzas del caos. La religión Egipcia es heredera de sus diversos cultos locales, cada una con una propia metodología y todas ellas variaciones sobre el tema de los ciclos naturales del sol y el Nilo. Luego si convertiría en religión oficial del estado centrado en el dios Osiris quien habría enseñado a los egipcios las artes y la agricultura. Según la leyenda, Osiris representa el sol poniente, que desciende agonizante al mundo subterráneo por culpa de Set que representa la noche. Horus es el sol naciente, que mata la noche.

El Faraón encarna a Horus mientras está vivo y a Osiris después de su muerte. Si el Rey entraba en relación con los dioses conforme a los rituales prescritos, el Nilo rebosaría, las cosechas serían abundantes, y la enfermedad y la penuria se mantendrían a distancia.

Las primeras tumbas eran unas construcciones en forma de tronco de pirámide de base rectangular con adobe, ladrillo cocido llamados por los árabes como mastabas. Luego con el tiempo llegarían a ser piedra, las mastabas más antiguas pertenecían a reyes de la primera dinastía y segunda dinastías.

2.1.2. El Imperio Antiguo

Con el fin de la segunda dinastía y la entronización de la tercera comienzo el período que los historiadores llaman imperio antiguo. Zoser, el primer rey llegó al poder hacia el año 2680, su consejero Imhotep, como científico de la historia tuvo fama como médico, y mago. También fue un gran arquitecto y construyó en Sakkara la mastaba de Zoser. Utilizó la piedra por primera vez, luego construyó otra más pequeño sobre la segunda y así hasta seis mastabas de tamaño decreciente formando una pirámide escalonada.

> La necesidad de obtener la seguridad resultaba más apremiante cuando subía al poder una nueva dinastía. No sabemos a ciencia cierta de qué manera llegaba a su fin una dinastía y empezaba una nueva. Esto fue, quizá lo que sucedió cuando la III Dinastía subió al trono. Las muestras de poder desplegadas por esta dinastía son tan notables que el período que comienza con ella se conoce por Imperio Antiguo. (La razón de este adjetivo es la existencia de períodos posteriores de magnificencia y de poder real en la historia egipcia, que han recibido los nombres de Imperio Medio e Imperio Nuevo.) El primer rey (o quizá el segundo) de la III Dinastía fue Zoser. Este comenzó su reinado hacia el 2680 A.E.C., y tuvo la inmensa suerte de tener como consejero a un sabio llamado Imhotep. [Asimov, 1993, p. 22]

Sneferu, el primer Rey de la IV dinastía hizo construir una pirámide escalonada de ocho pisos y después mandó rellenar los escalones dando así una impresión de uniformidad. Después de Sneferu, todas las pirámides, unas ochenta en total, fueron ya verdaderas pirámides.

Faraón Jufu manda construir la Gran Pirámide también conocida como Pirámide de Keops. Según testimonios recogidos por Herodoto tardó veinte años en construir y trabajaron cien mil hombres. Jafre, hijo de Jufu mandó construir otra más pequeña y su hijo Menkure manda construir otra más pequeña todavía. Las tres se encuentran en la ciudad de Giza.

La V dinastía dura hasta el 2439. Durante esta dinastía y la siguiente decae la erección de pirámides. El rey Pepi I el tercera de la VI dinastía, tuvo que mantener a raya a los nómadas del decirto quienes abastecían a los egipcion de medera y de metales. Pepi I le sucede su hijo Pepi II en el año 2272 siendo niño gobiernó noventa años el reinado más largo de la historia. Después de su muerte el imperio antiguo llega a su fin. Egipto se fragmenta y comienza una edad oscura. Manetó enumera cuatro dinastías durante este período, de la VII hasta la X.

2.1.3. Imperio Medio

El período del antiguo Egipto que siguió al primer período intermedio de Egipto va desde aproximadamente el año 2050 al 1750 A.E.C. y abarca las dinastías XI y XII. En el primer período intermedio Egipto se dividió en dos potencias una en el Norte (Heracleópolis con la IX y X dinastia,) y otra en el Sur (la dinastía XI en la ciudad de Tebas).

> Luego siguió un siglo de confusión, una «Edad Oscura» de guerra civil, inquietud y pretendientes en lucha por el trono. Durante este período fueron saqueadas todas las magníficas tumbas de los faraones constructores de las grandes pirámides. No se conoce prácticamente ningún detalle de la historia de los diversos fragmentos de Egipto en este período. Sus insignificantes gobernantes precisaban de todas sus fuerzas para sobrevivir, y no les quedaba energía para preocuparse de monumentos e inscripciones. [Asimov, 1993, p. 33]

Alrededor de 2050 A.E.C. el gobernante Tebano Nebhepetra Mentuhotep, o Mentuhotep II completó la conquista y así ciento treinta años después de la desaparición de Pepi II, Egipto estaba regido de nuevo por un único monarca. Con él comienza el imperio Medio.

La ciencia también avanzó. Cuando menos, se ha descubierto un documento, llamado el Papiro Rhind, que, aparentemente, es una copia de un original escrito en la XII Dinastía.

Los últimos reyes de la dinastía tuvieron la valiosa colaboración de Amenemhat, un muy hábil primer ministro. El ministro ascendió al trono en 1991 y reinó como Amenemhat I, inaugurado de este modo la XII dinastía. Cambió la capital de Tebas a Lisht más al norte para controlar mejor el bajo Egipto. La XII dinastía fue una la edad de oro del imperio medio, así como la IV lo fue del imperio antiguo. Este dinastía progresó la arquitectura, la orfebrería, la literatura profana y las pirámides hicieron más pequeñas. También la ciencia progresó, el más importante el documento matemático egipcia del que se hablará después, en una copia de un escrito original durante la XII dinastía.

En 1971, Senusret, o Sesostris I, accede al trono. Fue el primer rey que hizo conquistas fuera del Egipto, pasó la primera catarata y llegó hasta la segunda catarata, dejando a lo largo del río fuenter militares y enclaves fortificados. Con Amenemhat III, hijo y sucesor de Sesostris I, el poder a la prosperidad de la XII dinastía llegó a la cúspide. Con la muerte de Amenemhat III acaba el imperio medio y el reino se divide.

2.1.4. Los Hicsos

Después de la desaparición de Amenemhat III, el Egipto fue invadido por los heterogéneas de nómadas por el noreste. Los Egipcios los llamarón "Hicsos". Ellos tenían carros y caballos que los Egipcios carecían. Llamados también para algunos estudiosos recientes como "reyes pastores" que significa "gobernantes de las montañas". Los Hicsos Controlaron un imperio que abarcaba el bajo Egipto y Siria. Dos linajes de reyes Hicsos rigieron Egipto durante las dinastías XV y XVI, según el catálogo de Manetón. Luego durante este periodo entraron también pacíficamente oleadas de inmigrantes procedentes de Canaán al sur de Siria.

Entretanto en Tebas, demasiado al sur para ser controlado por los Hicsos, los sacerdotes de Amón mantenían su poder. Unos sesenta y cinco años después de la invasión de los Hicsos, sus gobernantes hicieron con el título de reyes y se consideraron reyes legítimos de Egipto. Así se inicia la dinastía XVII, que coexiste con la XVI en el norte. Los Tebanos aprendieron a manejar los carros y los caballos, empezaron a luchar contra los Hicsos. A Kamosis el último rey de la XVII dinastía le faltó poco para ver el triunfo final. Luego de su muerte llega al poder Ahmés I quien inaugura la XVIII dinastía y completa la conquista derrotando al último rey Hicsos y lo persiguió hasta Palestina.

> **Flavio Josefo** en su libro Contra Apión, en el transcribe lo que antes había relatado el sacerdote y escriba del siglo III A.E.C. llamado Manetón:
> "Tutimaios. Durante su reinado, por una causa que desconozco, nos azotó una maldición de Dios, y de una manera insperada marcharon desde las regiones del este invasores de una raza oscura, confiados en la victoria, contra nuestro país. Por la fuerza se apoderaron de él sin descargar un golpe, y después de dominar a los gobernantes del país, incendiaron nuestras ciudades sin piedad, derribaron hasta los cimientos de los templos de nuestro país y trataron a todos los egipcios con cruel hostilidad, masacrando a uno y esclavizando a las esposas e hijos de otros.
>
> Finalmente nombraron el rey entre ellos, llamado Salitis. Tuvo su sede en Menfis, sometiendo a tributos al Alto y Bajo Egipto, y siempre dejando guarniciones detrás

> en los lugares más importantes. En el mismo Sethroita fundó una ciudad favorablemente situada y la llamó Avaris, según una antigua tradición religiosa.
> Después de reinar diecinueve años murió Salitis, y le sucedió un segundo rey, Bnon, quien reinó 44 años. Después de él vino Apachnan, que reinó 36 años y 7 meses; Asis 49 años y 10 meses. Estos seis reyes, sus primeros gobernates, se esforzaron cada vez más y más en extirpar al pueblo egipcio.” [Flavio, 1994]

2.1.5. El Imperio Nuevo

Es el período en la historia del antiguo egipto que transcurre entre los años 1550 A.E.C. y terminando 1070 A.E.C., que abarca las dinastias XVIII, XIX y XX de Egipto. Las dos últimas dinastías, XIX y XX, se agrupan bajo el título de Período Ramésida.

> El Imperio Nuevo era diferente en un aspecto importante de los Imperios Antiguo y Medio. Egipto había aprendido las cosas de la vida. Los egipcios habían descubierto que no estaban solos en el mundo, que no constituían la única potencia civilizada, rodeada de seres inferiores. Había otras potencias militares que eran peligrosas, y a las que Egipto debía aplastar si no quería ser aplastado. Ahora Egipto tenía carros; contaba, además, con una tradición victoriosa sobre un poderoso enemigo. [Asimov, 1993, p. 44]

Ahmés I comienza el imperio nuevo expulsando los invasores. Estableció el poder en el norte, y en adelante el rey ya no será solo garante de la fertilidad, también lo será de las victorias militares, con el título de faraón que significa “la gran casa”. En el año 1545 llega al poder Amenofis I, hijo y sucesor de Ahmés I. Con él, el territorio de Egipto se consolidó totalmente, Tutmosis I, su sucesor llega aún más lejos con su conquista. Tebas se convirtió en la ciudad más grande y fastuosa del mundo. Los faraones en adelante llenarán de templos, obeliscos y estatuas. Tutmosis I al lado occidente del río Nilo mandó construir su tumba, en vez de pirámide, hizo excavar la roca y construiron laberintos para desorientar a los saqueadores de las tumbas. Más de sesenta faraones fueron sepultados posterior de Tutmosis I, y así surgió necrópolis que llamamos el Valle de los Reyes.
A Tutmosis I le sucedió Tutmosis II su hijo, casado con su hermanastra Hatshepsut. En 1490 A.E.C., le sucede Tutmosis III su hijo muy joven para gobernar, en consecuencia su madrastra reinó en su lugar y mantuvo en paz y embelleció a Tebas con monumentos. También mandó construir un enorme obelisco que está actualmente en el parque central de Nueva York conocido como “Aguja de Cleopatra”.

Hatshepsut murió en 1469, y Tutmosis III asumió el poder. Después de treinta y tres años de reinado murió. Le sucedió su hijo Amenofis II, a este su hijo Tutmosis IV y a éste su hijo Amenofis III. Los tres supieron salvaguardar la herencia del gran Faraón, manteniendo el imperio sin externderlo y practicando la política de paz.

Amenofis III muere 1370 A.E.C. y le sucede su hijo Amenofis IV. Simpatizado por las ideas religiosas de su madre creó nuevo culto con el sol como único deidad, cambió su nombres por Ajenatón, pero los sacerdotes Tebanos opusieron y trajeron al pueblo abajo. Ajenatón abandonó la capital y luego hizo construir, entre Tebas y Menfis, una nueva capital dedicada a la nueva fe, la llamó Ajenatón (el horizonte de Atón), y construyepalacios y residencias para su familia y la nobleza. Todo lo ganado por Tutmosis III y conservado por sus tres inmediatos sucesores se perdió. Tutanjatón, un yerno de Ajenatón que le sucede en el trono cambió su nombre por el de Tutankhamón. Él fue un rey de escasa relevancia política pero por dos motivos es el más conocido de todos los a faraones. Primero, porque su tumba nunca fue saqueada; segundo, por la popular leyenda de “maldición de faraón”.

A Tutankhamón le sucedió su visir Ay, que hizo un débil intento de conservar las doctrinas de Ajenatón, y a este un general llamado Horemheb, que se convirtió en faraón el año 1339 A.E.C. Bajo su gobierno se recuperó en parte el prestigio militar de Egipto y se restablecieron definitivamente las viejas creencias. Horemheb murió en el año 1304 A.C.C. y le sucedió Ramsés I, uno de sus generales, con quien se inicia la XIX dinastía que duró solamente un año. Le sucede su hijo Setis I que afianzó el poder Egipcia en Siria, venció a los Libios y edificó grandes templos en Tebas. Setis murió en el año 1290 A.E.C. Sucede su hijo Ramsés II que era muy joven y reinó sesenta y siete años, el más largo de la historia de Egipto después del Pepi II. Ramsés fue egocentrismo llenó a Egipto de monumentos. Tebas alcanzó su mayor esplendor expandiéndose a ambos lados del Nilo, llenándose de tesoros y el perímetro de sus murallas llegó a medir catorce millas. Su fama de Ramsés llegó más lejos, murió cerca de noventa años y fue sucedido por su hijo Merneptah, él tenía que enfrentar los invasores que entraban por el mar. Merneptah murió en el año 1211 A.E.C., y durante veinte años reinaron reyes de escasa importancia, pero en el año 1192 A.E.C., el gobernador de Tebas, quien aseguraba ser descendiente de Ramsés II, accedió al trono y inauguró la XX dinastía. Ramsés III, quien comenzó su reinado en el año 1190 A.E.C. Este rey tuvo que enfrentar nuevamente los pueblos del mar (los filisteos) procedentes de costa sur de Asia menor que entraron a Egipto desde Siria. Ramsés III derrotó completamente a los invasores filisteos y estés se ubicaron en la costa noreste de Egipto, donde vivieron en permanente revalidad con los Israelitas. Este fue la última victoria de Egipto. Ramsés III murió en el año 1158 A.E.C. después de treinta años de reinado. Durante los ochenta siguientes reinaron ocho reyes, todos ellos llamados Ramsés, desde Ramsés IV hasta Ramsés XI. A la muerte del último rey, de esta dinastia en 1075 A.E.C., el sumo sacerdote de Amón se autoproclamó gobernante de Egipto. Pero no reinó sobre un Egipto unido. En la región delta surgió un segundo grupo de gobernantes, con capital en Tanis, que son agrupados en la dinastía XXI.

2.1.6. Los Libios

Durante la época de la Dinastía XXI finaliza la contienda en Siria. Los israelitas habían hallado a su líder en el guerrero judío David, y bajo su mando, los filisteos habían sido completamente derrotados, y sometidas las pequeñas naciones circundantes. La debilidad de Egipto fue aprovechada por Israelitas que abarcaron desde la península del Sinaí hasta el río Éufrates. Las ciudades fueron aleados a David y de su hijo Salomón. Egipto procura llevarse bien con Israelitas, Psusennes II, el último faraón de la dinastía XXI, cedió una hija para el Harén de Salomón y la otra se casó con un hombre de origen Libio llamado Sheshonk. A la muerte de Psusennes le sucedió Sheshonk con quien comienza la dinastía XXII. Él recuperó el control de Tebas y unificó el valle del Nilo, y apoyó al líder rebelde Jeroboam.

> Durante los ochenta años que reinaron estos Ramésidas (1158-1075 A.E.C.), todas las tumbas de Tebas, excepto una, fueron saqueadas. Fueron robados incluso los tesoros funerarios del propio Ramsés II. Con ocasión del entierro de uno de estos Ramésidas, Ramsés IV, en el 1138 A.E.C., la tumba de Tutankhamón, que había gobernado dos siglos antes, quedó eficazmente cubierta, lo que le permitió permanecer intacta hasta los tiempos modernos. [Asimov, 1993, p. 65]

Egipto era en este momento más débil que nunca pues estaba dividido, y la labor que Menes había llevado a cabo dos mil años antes parecía de nuevo destruida. Lo único que se conoce con certeza acerca del Egipto de la Dinastía XXI es una aislada mención bíblica que, en sí misma, subraya el estado de deterioro en que había caído la poderosa tierra de Tutmosis III y de Ramsés II. Tras el triunfo sobre David y Salomón se desintegra definitivamente y quedó pequeño reino de Judá con capital en Jerusalén donde el linaje de David permaneció durante más de trecientos años pero fue invadido por Sheshonk que saqueó el templo y sometió al país a tributo. Tebas volvió separarse en el año 761, luego inicia la dinastía XXIII por los nuevos integrantes de Tebas.

2.1.7. Los Nubios

Los Nubios se ubicaron en el sur de Egipto. Los faraones no llegaron dominar más hacia el sur. Por esta razón los Nubios se fueron alejados políticamente de Egipto, pero culturalmente siguieron siendo Egipto, establecieron su capital en Napata. Cuando Sheshonk se hizo con el dominio de Tebas, algunos sacerdotes de Amón se refugiaron en Napata, y bajo la influencia de estos sacerdotes Nubia fue acercándose al culto a Amón. Superaron en ortodoxia al propio Egipto, más tarde conquistó a Tebas devolviendo el poder a los sacerdotes exiliados. La dinastía de estos reyes que les hicieron frente es la dinastía XXIV, y la de los Nubios la XXV.

> La conquista no fue difícil, dado que un Egipto tan desorganizado era una presa asequible. El monarca nubio Kashta conquistó Tebas casi de golpe, donde fueron reinstaurados los descendientes del clero exilado. El sucesor de Kashta, Pianji, se aventuró más hacia el norte, adentrándose en el Delta hacia el 730 A.E.C; se lo considera el primer monarca de una nueva dinastía (llamada con frecuencia Dinastía Etíope, que deriva del nombre que los griegos daban a la patria de Pianji). En ciertas partes del Delta dos gobernantes egipcios resistieron durante algún tiempo. Manetón considera a los egipcios como la Dinastía XXIV, y a los conquistadores nubios, como la XXV. [Asimov, 1993, p. 67]

El rey asirio Senaquerib conquistó a Siria poniendo cerca de Jerusalén en el año 701. La lucha fue muy dura, y las tropas Egipcias comandadas por Taharka sobrino de Faraón, fueron derrotadas Senaquerib fue asesinado en el año 681 A.E.C. Su hijo Esarhaddón lo sucedió el poder y tomó Menfis y el Delta pero Taharhaddón consiguió derrotar. Esarhaddón murió y su hijo Asurbanipar reconquistó Menfis y persiguió a Taharka hasta Tebas, que fue tomada en el año 661 A.E.C. Así acabó la dinastía de los faraones Nubios.

2.1.8. El Egipto Saítico

La invasión asiria penetró más profundamente, pues alcanzó Tebas, pero no fue tan intensa. Los asirios se contentaron con gobernar a través de delegados egipcios renombrados por su hostilidad hacia los nubios. Su elegido fue un príncipe de Bajo Egipto llamado Necao. Prisionero de guerra de los asirios, había estado con ellos el tiempo suficiente como para apreciar quiénes eran sus amos, y aceptó servirlos como su virrey egipcio. Cumplió su cometido fielmente, muriendo al final al lado de los ejércitos de Asurbanipal, en la guerra contra los nubios.

Su hijo Psamtik llamado Psamético por los griegos le sucedió en el trono. Este esperó con cautela una oportunidad para romper con Asiría, pues era evidente que sus días de gloria habían pasado. Asurbanipal se hallaba acosado por gran cantidad de problemas. Babilonia se hallaba en perpetuo estado de rebeldía. El país independiente de Elam, al este de Babilonia, luchaba tenazmente contra Asiria. Una nueva oleada de nómadas, los cimerios, descendieron rápidamente sobre el Asia Menor procedentes de las tierras al norte del mar Negro y devastaron todo el país como un tornado.El hábil Asurbanipal se las ingenió para manejarlo todo en su beneficio.

Psamético fundó la Dinastía XXVI, arreglo con Manetón. Estableció la capital en Sais, en el brazo más occidental del Nilo, a unas treinta millas del mar. Por ello, la dinastía de Psamético se denomina, a veces, “Dinastía saítica”, y el Egipto de la época, “Egipto saítico”. Psamético fue un soberano capaz, y bajo su gobierno Egipto experimentó no solamente una renovación económica, sino un renacimiento artístico.

Ahmes murió en el año 525 A.E.C. y sucedió su hijo, Psamético III. A Ciro le sucedió Cambises, quien dispuso a invadir Egipto.

2.1.9. Los Persas

Los egipcios fueron literalmente arrollados por los persas y cambises. Probalemente rigió Egipto con sensatez, como hicieron en general los persas. Además aceptó el vasallaje de Libia y de la ciudad griega de Cirene, y llegó a controlar el norte de Nubia. Los Cambises tuvo que abandonar Egipto para enfrentar a un rival que se proclamó rey asegurando ser hijo de Ciro. Murió en el camino y fue sucedido por Darío I y bajo su mandato Egipto prosperó y conservó sus viejas costumbres. Aprovechando una desafortunada campaña contra Grecia, y los persas fueron derrotados de Maratón. En esto muere Darío y su hijo Jerjes sucedió y se encuentra con la responsabilidad con dos frentes, Grecia y Egipto. No obstante de atender ambas a la vez y considera más urgente el segundo. La sublevación es aplastada y Egipto es sometida de nuevo. La guerra demoró tres años y fue muy bien aprovechada por los griegos para rearmarse. Cuando Jerjes retoma sus planes de invadir Grecia los Persas son nuevamente derrotados en la batalla de Salamina. Jerjes fue asesinado en el año 464 A.E.C. y fue sucedido por Artajerjes I en consecuencia genera la segunda rebelión con ayuda del a Flota atenienses. Artajerjes I consiguió sofocar y las tropas griegas fueron aniquilados.

A Artajerjes le sucedió Darío II y a éste Artajerjes II, pero para tomar el trono provocó guerra civil, contra su hermano Ciro. Esta fue aprovechada por los egipcios para una tercera rebelión logrando una precaria emancipación que duró unos sesenta años. En este periodo de emancipación gobernaron brevemente las dinastías XXVII, XXIX, XXX. El primer rey de la dinastía XXX fue Nectabeno I que murió en el año 360, dejando Egipto un próspero e independiente. Le sucedió Teos, y a este le sucede Nectabeno II.

Artajerjes II muere en el año 358 A.E.C. y le sucede su hijo Artajerjes III, quien intenta de nuevo una campaña contra Egipto. Esta vez la invasión tuvo éxito, y Nectabeno II tiene que refugiarse en Nubia. Es el último rey de la lista elaborada por Manetón.

2.1.10. Los Griegos

El rey Filipo II sube al trono de Macedonia al norte de Grecia. Macedonia era de lengua y cultura Griega, pero hasta entonces había sido un país de pequeña importancia a que algunos griegos consideraron como bárbaros e incultos. Filipo II creó un gran ejército para controlar Grecia. En el año 336 A.E.C. el ejército griego comandado por Filipo II inicia el avance hacia Asia Menor para invadir Persia, Filipo fue asesinado, y fue sucede por su hijo Alejandro III, conocido como Alejandro Magno, que solo tenía veinte años de edad. Alejandro sofocó todo intento de rebelión, y en el año 334 A.E.C. retornó el proyecto contra Persia. En el noreste de Asia derrotó al ejército Persia, después bajó por la costa de Siria y entró en Egipto donde fue recibido como un libertador. El respetó sus costumbres y se adaptó con ello y ofreció sacrificio a los dioses egipcias, incluso viajó hasta un lejano templo de Amón. Después buscó un lugar al norte del Nilo y fundó una ciudad llamado Alejandría en recuerdo de sí mismo. Luego dejó el proyecto a Cleomenes y al arquitecto Dinocrátes de Rodas y abandonó Egipto en pos de nuevas conquistas, dejando que un grupo de egipcios nativo lo gobernaran en su ausencia.

Alejandro fue ganado una batalla tras otra contra los ejércitos de Darío III, el último rey de Persia fue asesinado por sus propios hombres. Acabó así la dinastía iniciada por Ciro el Grande. A los treinta y tres años muere Alejandro Magno dejando una sucesión incierta. Uno de sus hombres, Ptolomeo si convierte el gobierno de Egipto, y para mejor legitimar su posición se apoderó del cuerpo de Alejandro y lo mandó enterrar en Menfis. Como rey de Egipto fundó una dinastía que duró tres siglos. Egipto se convertió en una provincia romana.

La capital fue Alejandría, que se conviertió en una ciudad grande, próspera y cosmopolita, habitada por los griegos, judíos y egipcios nativos. Además Alejandría se convierte el más importante centro de saber de la Antigüedad. Crearon un museo, dotado de una espléndida biblioteca, donde sabios y eruditos podían estudiar e investigar libres de otras preocupaciones. Allí se encontraron los saberes teóricos griegos y los más prácticos de los egipcios, allí también Euclides escribió sus elementos, y allí midió Eratóstenes la circunferencia de la tierra, allí también la biblia fue traducida en griego.

Capítulo 3

ALGUNOS DOCUMENTOS MATEMÁTICOS EGIPCIOS

3.1. El Papiro

Papiro es el nombre que recibe el soporte de escritura elaborado a partir de una planta acuática, cuyo nombre científica es *Cyperus Papyrus*. Los rollos de papiro tenian una longitud media de cinco metros, se escribió en la cara del papiro que tenía dispuestas las tiras horizontalmente. La tinta se elaboraba con hollín o carbón vegetal tratado con una solución de cola. Los papiros podían ser de muy distintas condiciones.

El uso de papiro declinó al mismo tiempo que la vieja cultura Egipcia, siendo sustituida paulatinamente por el pergamino, pieles de animales que vinieron a sustituir al papiro vegetal. Disminuyó a lo largo del siglo V y desapareció completamente en el siglo XI.

3.1.1. El Papiro de Rhind

El papiro de Rhind es el documento matemático más completo que seconoce del antiguo Egipto. Tiene el nombre del escocés Alexander Henry Rhind quién lo compró, en 1850, en Luxor, Egipto. También se conoce como el papiro de Ahmes, el escriba egipcio quién lo copió. Actualmente se encuentra en el Museo Británico.

Los papiros encontrados indican que por lo menos en el siglo XXVII A.E.C. ya estaba asentado el pensamiento científico en el antiguo Egipto. Un grupo de árabes, específicamente Mustafa Agha, encontró el 10 de enero de 1862 unos rollos de papiros entre los pies de la estatua de Anubis en Letópolis, quien luego se los vendió a compradores ingleses de antigüedades. Uno de los papiros era referente a medicina (Papiro de Edwin Smith) y el otro referente a matemática llamado Papiro de Rhind, ambos llamados así por sus compradores. Además se encontraron fragmentos de escritura hierática con el nombre o referentes al rey Tutmosis I. [2]

El papiro mide unos 6 metros de largo y 33 centímetros de ancho. Escrito en hierático, consta de 87 problemas y sus resoluciones. Nos da la información sobre cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculos de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. Fuero escritos por Ahmes aproximadamente en el 1650 A.E.C.

Se conoce muy poco sobre el objetivo del papiro. Se ha indicado que podría ser un documento con claras intenciones pedagógicas, o un cuaderno de notas de un alumno. Para nosotros representa una guía de las matemáticas del antiguo Egipcio, pues es el mejor texto escrito de ese tiempo en el que se revelan los conocimientos matemáticos. No da ningún método para resolver los problemas, sino que solamente se encuentran sus soluciones. No se ve en ellos un procedimiento deductivo, sino únicamente muestra una especie de tablas o recetas para resolver. Así, por ejemplo aparece en el papiro mencionado la costumbre egipcia de expresar todo número racional en una suma de fracciones de numerador la unidad. De esta forma, aparece la fracción $\frac{2}{47}$ descompuesta de la siguiente forma.

$\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$

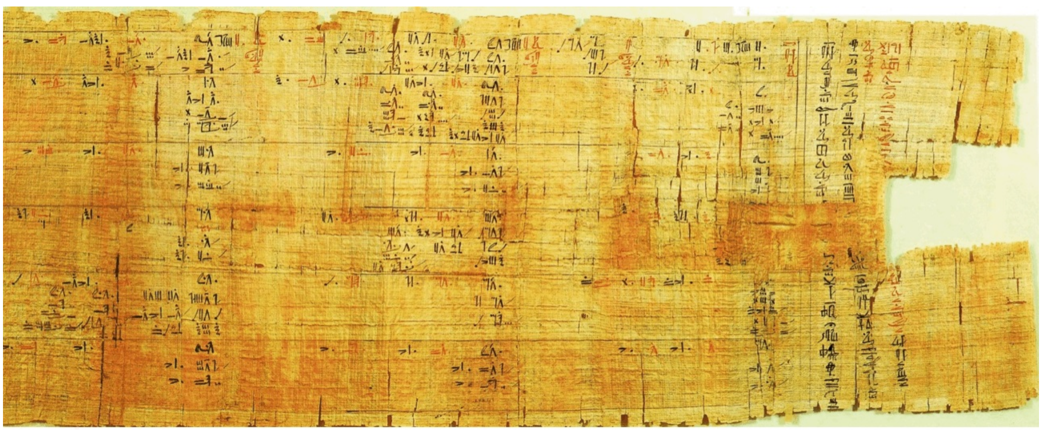



Figura 3.1: Parte inicial del Papiro de Rhind
[Robins and Shute, 1987, pp.65-68]

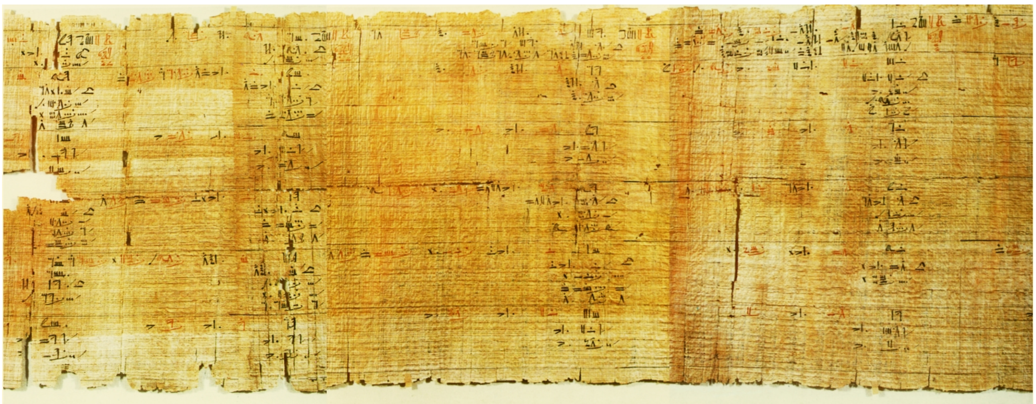


Figura 3.2: Fragmento del Papiro de Rhind
[Robins and Shute, 1987, pp. 68-72]

3.1.2. Descripción general del papiro de Rhind

De acuerdo con **Robins y Charles Shute** [Robins and Shute, 1987, p. 10], el papiro empieza con el título, la fecha y el nombre del escriba siguen los procedimientos para duplicar fracciones unitarias impares. La fracción más pequeña que es tratada es $\frac{1}{101}$, y se encuentra en los fragmentos de New York que intervienen entre los fragmentos que están en el Museo Británico. Los primeros sesenta problemas propios del papiro están en anverso. El papiro contien en el reverso una regla para multiplicar la fracción impar por $\frac{2}{3}$. Esto es seguido por una parte puramente matemática. En la última parte de reverso contiene algo que ha sido interpretado de diversas formas como un criptograma o garabato. Una gran parte del reverso que está en blanco, aparte de dos pequeñas áreas dadas en los números 86 y 87. El número 86 es un parche de tres tiras pegadas en la antigüedad; que contiene una lista de registros de otros papiros. Casi todos los problemas de papiro Rhind tiene las palabras iniciales recogidos en tinta roja, que ayuda a delimitar los problemas uno a otro. A veces el color rojo se utiliza para establecer aparte ciertos números del cálculo principal, como en el caso de múltiplos comunes necesarios para la suma de las fracciones unitarias.

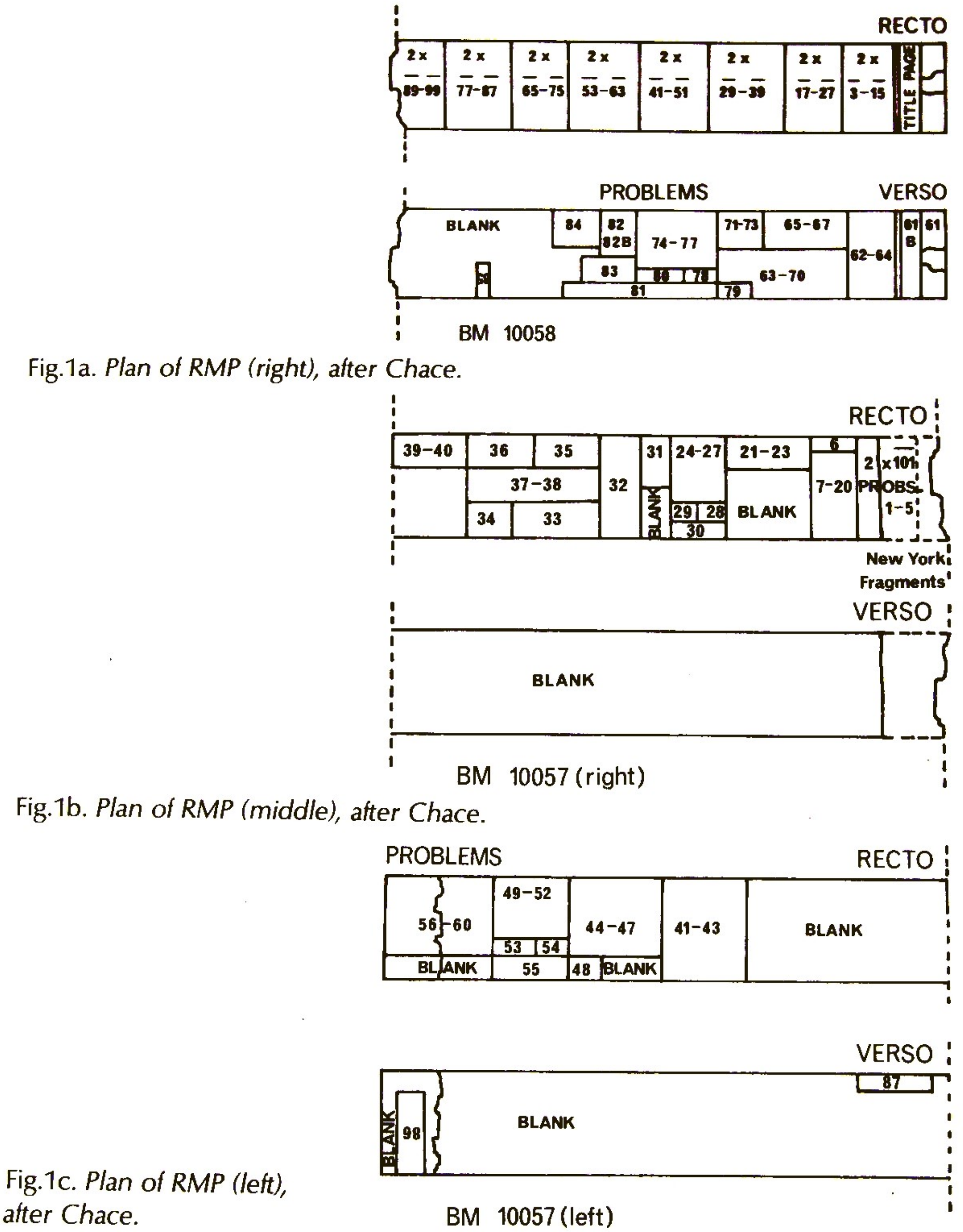


Figura 3.3: Descripción general del Papiro de Rhind

3.1.3. El Papiro de Moscú

Vladimir Semiónovich Golenishchev, nacido en 1856, provenía de una familia vieja de la nobleza rusa. Durante toda su vida viajó a Egipto, organizando y financiando excavaciones. Recopiló una enorme colección de antigüedades egipcias, entre ellas el Papiro matemático de Moscú que fue comprado en el año 1883. En cuya universidad ocupó la cátedra de Egiptología. Murió en Niza, a los 90 años. El Papiro de Moscú junto con el de Rhind es uno de los documentos matemáticos más importante del antiguo Egipto. Originalmente se le conocía como papiro Golenishchev pero posteriormente, cuando fue a parar al museo de bellas artes de Moscú, en 1917 se hizo, Conocido como Papiro de Moscú. Tiene 5 metros de longitud y 8 centímetros de ancho, consta de 25 problemas, aunque algunos se encuentran demasiados dañados para poder ser interpretados. El papiro, fue escrito en hierática alrededor del 1890 A.E.C. (XII dinastía) por un escriba desconocido, que no era tan meticuloso como Ahmes.

El objetivo principal de este texto tal vez fue, por medio de intentos y aproximaciones, de obtener métodos y reglas eficaces desde el punto de vista de la aplicación. Así que los egipcios eran capaces de calcular áreas de figuras rectilíneas como cuadrado, triángulo y trapecio.

En este papiro aparece una expresión exacta para el volumen de un tronco de pirámide de bases cuadradas. Y las propiedades geométricas las que utilizaron los antiguos Egipcios en la construcción de sus monumentos y en el trazado de bóvedas, cúpulas, etc.

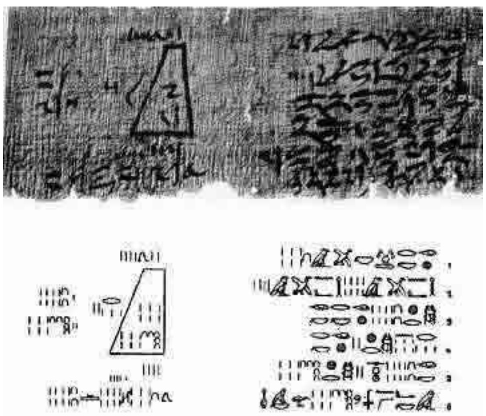


Figura 3.4: Fragmento del Papiro de Moscú
[Thomas, 1931, p. 50-52] [Gillings, 1972, p. 552-555]

3.1.4. Papiro de Berlín

El Papiro de Berlín es otro de los documentos egipcios que permite conocer las matemáticas desarrolladas por los egipcios. Se puede datar entre los años 2160 y 1700 A.E.C. De autor desconocido, se encuentra en el Museo staatliche en Berlín. Fue comprado por A. Henry Rhind en 1850, la misma altura que el papiro Rhind, pero estaba en muy malas condiciones y sólo ha sido analizado unos 50 años más tarde por Shack Schackenburg. Aun así, el Papiro de Berlin está parcialmente dañado.

En este papiro se encuentra problemas relacionados con las fracciones unitarias, ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Debemos destacar la resolución de 2 problemas que suponen un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, una de las cuales es además de segundo grado. Aunque los problemas son muy sencillas y de resolución directa no por eso tiene menos importancia, pues son la única prueba de intentos de resolver problemas que estan relacionados con sistemas de ecuaciones.

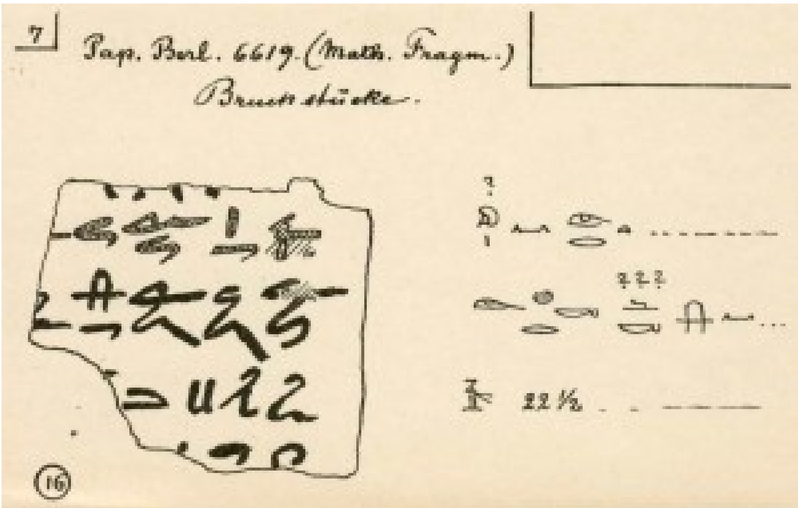


Figura 3.5: Fragmento del Papiro de Berlín
[Blackman and Davies, 1988]

Capítulo 4

MÉTODOS DE CÁLCULO: MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

4.1. Los sistemas de numeración egipcios

Los egipcios crearon un complejo sistema de escritura, que también incluyó la forma de registrar los números alrededor de año 3000 A.N.E.

> Esto sólo ocurrió a partir de 1799, con la expedición de Napoleón Bonaparte a Egipto. Fueron soldados franceses que encontraron al este de Alejandría, cerca de Rosetta, una piedra de color negro (piedra de Rosetta) que contenía una escritura en tres idiomas: griego, demótico y jeroglífico. Fue gracias al trabajo del inglés Thomas Young y del francés Jean François Champollion que los jeroglífico decodificados por comparación con el texto griego. [Estrada et al., 2000, p. 23]

> Los problemas que se encuentra en el papiro de Moscú y Rhind son numéricos, y muchos de ellos son muy simples. Aunque la mayoría de los problemas tienen un origen práctico, hay algunos de carácter teórico. [Eves, 1964, p. 39]

4.1.1. Sistema de numeración jeroglífico

> Los jeroglíficos son pictogramas muy detalladas que representan seres humanos, en varias posiciones, todos los tipos de animales, edificios, monumentos, objetos sagrados y profanos, las estrellas, las plantas y así sucesivamente. [Ifrah, 1994, p. 162]

> Para indicar los números enteros en sus diversas inscripciones monumentales los egipcios utilizaron esencialmente el sistema jeroglífico. Pero este sistema no fue uno que los escribas emplearon más actualmente. [Ifrah, 1994, P. 398]

> El sistema de numeración jeroglífica era un sistema de conteo. Había símbolos de 1, 10, 100, y toda la potencia de diez hasta un millón. [Suzuki, 2002, p. 2]

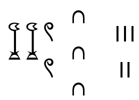
El sistema jeroglífico adjudicaba un sínbolo a cada potencia de diez y cualquier otro número se representaba por repeteción de estos símbolos. Tenían 7 símbolos básicos que representaban las unidades, decenas, centenas, etc.

La numeración hieroglífica era en la base 10 y no posicional. Esto significa que los diferentes símbolos que representan 1, 10, 100, etc. Cada uno de estos símbolos se repite tantas veces como sea necesario y el orden de presentación no es importante, ya que son diferentes símbolos. La siguiente tabla muestra algunos símbolos egipcios y sus valores correspondientes:

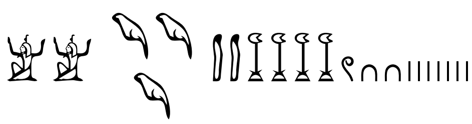
Jeroglífos	I	II	III	…	∩	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
Sistema decimal	1	2	3	…	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

Cuadro 4.1: Escritura jeroglífica

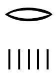
Para representar un número se incluían estos símbolos escribiéndolos de derecha a izquierda e incluso de arriba abajo y representando tantas de cada uno como unidades que tuvece el número.
Así, esta sería la representación del número 2235.



También la representación del número 2324127 en escritura jeroglífica.



En la representación de fracciones se empleaba el símbolo "𓂋" que en hierática se convertió en un punto "·" y que significa "parte", seguido encima del valor númerico del denominador.

$\frac{1}{5}$ =  $\frac{1}{100}$ =   $=\frac{1}{6}$

4.1.2. Sistema de numeración hierático

La representación jeroglífica no le facilitaba para una escritura rápida en vista de sus características. Dada esta circunstancia los escribas desarrollaron gradualmente otro tipo de representación mucho más simple, en este caso la escritura hierática.

Para representar los grupos de símbolos que aparecen en la notación jeroglífica fueron introducido nuevos signos, con poca relación con los símbolos originales. Por lo tanto, hubo nueve símbolos para las unidades, y nueve para las decenas y nueve para los centenas, y así sucesivamente. Esto permite un ahorro de símbolos de modo que el número 2235, representado arriba de 12 símbolos en notación jeroglífica necesita solamente 4 símbolos en la notación hierática.

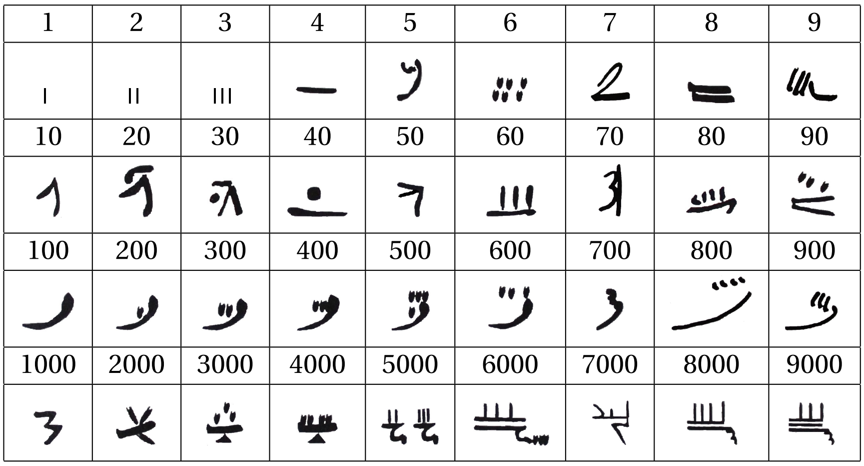
Ejemplo1.

2235 =  8976 = 

> La escritura hierática, (...) es una forma más abreviada de la escritura jeroglífica y el más adecuado para escribir sobre el papiro, que fue utilizado a menudo. [Estrada et al., 2000, p. 24]

> La escritura hierática utiliza signos que son simplificaciones y esquematismos del jeroglífico correspondiente, con un menor número de detalles y con formas reducidas a formas de esqueleto. En algunos casos, las versiones hieráticas pueden ser reconocidos como variantes de las señales originales; pero más a menudo es imposible adivinar la relación entre el “cursiva” y la forma “monumental” y tiene que ser aprendido signo por signo. [Ifrah et al., 2000, p. 170]

> La esritura hierática fue, en general, una forma “cursiva” de la escritura jeroglífica, apto para el uso diario. Sin embargo, los números en hierático se escriben utilizando un esquema totalmente diferente. [Suzuki, 2002, p. 4]



Cuadro 4.2: Escritura hierática

4.2. Método de multiplicación egipcia

> El algoritmo de la multiplicación egipcia consiste en un proceso de multiplicaciones sucesivas, quiere decir, para multiplicar dos números x e y se debe considerar inicialmente el par $(1, y)$ a continuación, se duplica sucesivamente cada número de ese par hasta que la duplicación siguiente del primer elemento exceda a x. [Estrada et al., 2000, p.28]

> La multiplicación es simplemente una suma, y esto es precisamente encontraron los egipcio como productos. El sistema utilizado se refiere a la duplicación y la reducción a la mitad. Para utilizar este procedimiento los egipcios, usan una “tabla” de los dobles sucesivas de uno de los factores de un producto que se generan; a continuación, los múltiplos que se suman para el otro factor se seleccionan y se añaden los múltiplos correspondientes para encontrar el producto. [Suzuki, 2002, p. 7]

A partir de entonces, se forma las potencias de dos y se encuentra la suma de ellos cuyo resultado sea igual a x. Por lo tanto serían seleccionados los múltiplos de y correspondientes a cada potencia de dos determinadas anteriormente y esos múltiplos se suman para obtener el resultado.

Ejemplo1:
Vamos a calcular 9×14, organizando los cálculos en 2 columnas, la primera columna enpieza por 1 y la segunda columna por 14:

Duplicamos ambas columnas sucesivamente

$$\begin{array}{cc} 1 & 14 \\ 2 & 28 \\ 4 & 56 \\ 8 & 112 \end{array}$$

Terminamos duplicar, ya que el doble de 8 es mayor que 9. En la columna izquierda marcamos por una barra invertida los números que sumados dan resultado 9.

$$\begin{array}{cc} \backslash 1 & 14 \\ 2 & 28 \\ 4 & 56 \\ \backslash 8 & 112 \\ \hline 9 & 126 \end{array}$$

Los números de la columna derecha sumados resultan $14 + 112 = 126$. Por lo tanto el resultado de la multiplicación 9×14 es 126.

Ejemplo2:

Para multiplicar 34×14. hacemos el mismo procedimiento.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 34 & \rightarrow & = & 1 & \times & 34 \\ \backslash 2 & 68 & \rightarrow & = & 2 & \times & 34 \\ \backslash 4 & 136 & \rightarrow & = & 4 & \times & 34 \\ \backslash 8 & 272 & \rightarrow & = & 8 & \times & 34 \\ \hline \end{array}$$
$$34 \times 14 = 2 \times 34 + 4 \times 34 + 8 \times 34 = 476$$

4.3. Método de división egipcia

> La división egipcia podría ser descrito como un segundo tipo de multiplicación, donde se les dio el multiplicando y el producto para encontrar el multiplicador. [Chace and Clare, 1979, p. 5]

> Los egipcios reconocieron que la división es receproca de la multiplicación, y de hecho, su método de división hace uso explícito de este hecho. Por lo tanto, el escriba egipcio no tenía que aprender un procedimiento separado para la división, como lo hacemos. [Suzuki, 2002, p. 8]

Se sabe que la división es la operación inversa de la multiplicación, por ejemplo para calcular $x \div y$, los egipcios interpretarían esto como una multiplicación: Multiplicar y de tal manera que se obtenga x. Ese proceso ocurre de manera análoga a la multiplicación, sin embargo para empezar consideramos como $(1, y)$. A continuación, se duplica sucesivamente cada número hasta que la duplicación siguiente del primer elemento exceda y. Después de eso, los múltiplos de y encontrados por la suma de ellos tal que el resultado es igual a x. Por lo tanto, cada potencia sería seleccionada equivalente al múltiplo de y, a continuación la suma de ellos para obtener el resultado de la división.

Ejemplo1: Para dividir $195 \div 13$ es necesario tener en cuenta el par $(1, 13)$. A continuación se utiliza el método de duplicaciones sucesivas en cada elemento del par.

\1	13
\2	26
\4	52
\8	104
15	195

En este caso no hay más multiplicaciones por hacer, ya que se da cuenta de que de una otra multiplicación en la primera columna resultaría $8 \times 2 = 16 > 13$. A continuación los múltiplos de 13 que serán escogidos y sumados $13 + 26 + 52 + 104$ da el resultado 195. como $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, entonces el resultado de la divión es 15.

Ejemplo2: Dividir $125 \div 5$

\1	5	$\rightarrow$	=	1	×	5
2	10	$\rightarrow$	=	2	×	5
4	20	$\rightarrow$	=	4	×	5
\8	40	$\rightarrow$	=	8	×	5
\16	80	$\rightarrow$	=	16	×	5
25	125					

$125 \div 5 = 25$ porque $25 \times 5 = 125$,

Pero los escribas egipcias se dieron cuenta que existen divisiones donde el resultado no es exacta. En esta situación se realizaron las fracciones unitarias.

4.3.1. Operaciones con fracciones unitarias

El uso de las fracciones es sin duda el aspecto mas peculiar de las matemáticas egipcias. El método utilizado por las escribas egipcias para trabajar con fracciones es un poco más complicado que la actual.

> El papiro Rhind es una de las más antiguas de las matemáticas escritas que ha llegado hasta nosotros; se refiere a la representación de los números racionales como la suma de fracciones unitarias. [Smith, 2012, p. 87]

> No se registró en los papiros el concepto de que los egipcios tenian de fracción, pero sólo diversos cálculos con fracciones, sobre todo con un tipo especial de fracciones: Las fracciones unitarias. [Estrada et al., 2000, p. 30]

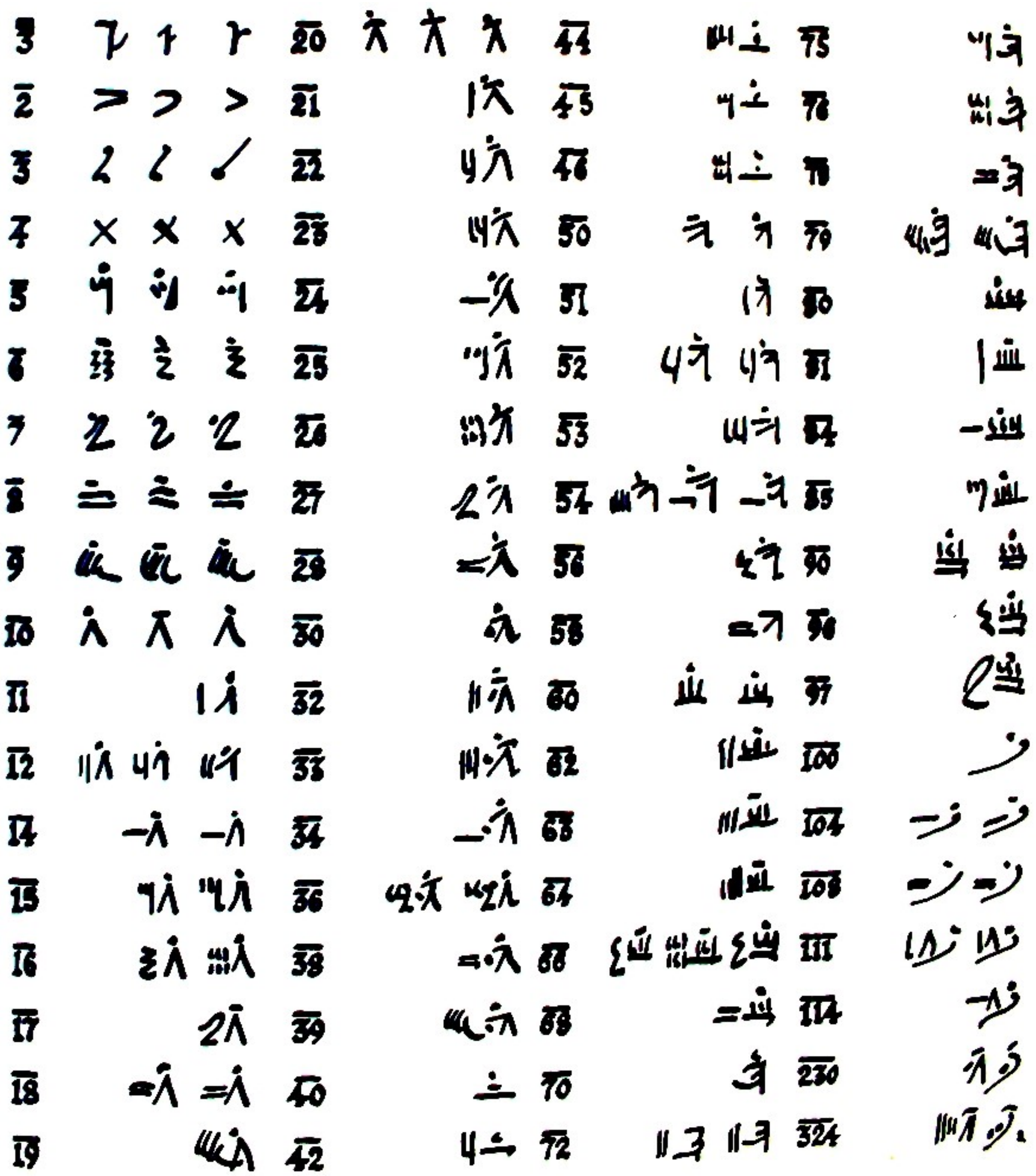
La base de la representación de una fracción estaba en la descomposición como la suma de las fracciones unitarias. Son fracciones de numerador igual a la unidad 1 que eran representadas en jeroglífos escribiendo el símbolo ⬭ por encima del correspondiente denominador y que en hierática se convertió en un punto ·
Por ejemplo

 $= \frac{1}{5}$ (jeroglífica)  $= \frac{1}{5}$ (hierática)

La aritmética egipcia se sustiene en las técnicas de duplicación para justificar la existencia de dos tipos de fracciones unitarias: Las *fracciones naturales* o fracciones que tienen asignado desde el principio un signo especial, son unidades individuales consideradas como comceptos básicos en igual nivel que los enteros: $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$; los restantes fracciones, las *fracciones algorítmicas*, surge como consecuencia de operaciones numéricas que están mucho menos arraigadas en el concepto elemental de entidades numéricas y por procedimientos de partición, se derivan de las fracciones naturales, así $\frac{2}{3}$ da lugar a $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots, \frac{1}{2}$ da lugar a $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ [Neugebauer, 1969a, p. 74]

Nosotros vamos aquí a representar las fracciones unitarias por un trazo horizontal encima del denominador correspondiente; así $\overline{6}$ representará $\frac{1}{6}$.
Como no tenían un símbolo para representar la suma, entonces escribían de la siguiente manera:
$\overline{3}\,\overline{5}$ esto significa $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$
$\overline{\overline{3}}\,\overline{11} = \frac{2}{3} + \frac{1}{11}$

En lo siguiente podemos observar que los egipcios representaban las fracciones de distintas maneras:



Extraido de Gillings p. 259

4.3.2. Fracciones de numerador 2

Las fracciones con numerador distinto de 1 se representaban como suma de fracciones conocidas con numerador 1, pero siempre los sumandos tenían que ser diferentes.
Así Ahmes en el papiro de Rhind escribe $\frac{2}{5}$ como $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ y nunca se podría emplear $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$. Cualquier

cantidad se expresaba como una parte entera más una suma de fracciones unitarias, y en algunas veces cuando es necesario utilizaba la fracción $\frac{2}{3}$ en la descomposición y el símbolo "$+''$ no se empleaba y las fracciones aparecían secuencialmente.

> El papiro de Ahmes comienza con una "tabla" de descompesiciones de todas las fracciones irreductibles de numerador 2 y denominador comprendido entre 3 y 101. [Moreno, 2012, p. 61]

> Puesto que el matemático egipcio realizó sus multiplicaciones en su mayoría por doble o la mitad que era necesario que él sea capáz de duplicar cualquier cantidad numérica, un recíproco de un número par, pero para los números impares que era conveniente tener una "tabla especial". [Chace and Clare, 1979, p. 13]

Al respecto varios investigadores dedicaron analizar la primera parte del papiro de Rhind y llamaron como "tabla" sin embargo no es una tabla sino la representación de suma de fracciones unitarias que les facilita para descomponer otras fracciones distintos de fracciones unitarias, llegando en algunas concluciones sobre el método de descomposición.

> Richard J. Gillings. [Gillings, 1972], ha establecido una serie de criterios que les facilite de las descomposicones de primera parte de papiro de Rhind no eran los únicos posibles, sino debieron orientar a su parecer ellos son los siguientes:

1. Las fracciones unitarias de la descomposición se presentan en orden decreciente, es decir: $\frac{2}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \ldots + \frac{1}{m_j}$ donde $m_1 < m_2 < m_3 \ldots < m_j$
   Notemos que $m_i \neq m_k; \forall_i \neq k$ con $1 \leqslant i, k \leqslant j$.

2. Una descomposición en dos sumandos es preferible a otros tres sumandos, la cual se prefiere a otra de cuatro, y así sucesivamente. De manera general, con el objeto se simplificar los posteriores cálculos, se elegirá la descomposición con la menor cantidad de sumandos.

3. Es preferible que el denominador m_1 sea lo menor posible. Esto implica que la fracción $\frac{1}{m_1}$ es la mayor posible y, luego del primer reparto, lo que da por repartir es la menor parte posible.

4. Las fracciones con denominador par se prefieren antes que las de denominador impar. Esto es así debido a que las descomposiciones, incluidas en otras operaciones aritméticas deben ser susceptibles de duplicarse o de dividirse a la mitad, en concordancia con el

primer principio u operacional básica, y ambos procedimientos son fáciles de realizar si el denominador es par.

5. No admiten denominadores mayores o iguales que 100, para poder garantizar la mayor simplicidad posible en los cálculos posteriores que utilicen estas descomposiciones en sumas de fracciones unitarias.

4.3.3. Fracciones de denominador por diez

Los problemas que siguen inmediatamente a la “tabla original”, se refierne a la división en partes iguales, 1, 2, 6, 7, 8 y 9 panes entre 10 hombres. En cada caso, las respuestas se dan en la forma de las fracciones unitarias mostradas en el Cuadro 4.3. En cada problema, el escriba afirma por primera vez su respuesta y luego por la multiplicación se demuestra que es correcta. Estamos más interesados en cómo se preparó la “tabla” y su aplicación a la división de los panes entre los obreros, y ahora intentamos construir da derivación original del escribano de esta “tabla”.

$$\begin{array}{ll} 1 & 10 \\ \backslash\,\overline{10} & \backslash\ \ 1 \\ \hline \overline{10} & 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & 10 \\ \overline{10} & \ \ 1 \\ \backslash\,\overline{5} & \backslash\ \ 2 \\ \hline \overline{5} & 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & 10 \\ \backslash\,\overline{10} & \backslash\,1 \\ \backslash\,\overline{5} & \backslash\,2 \\ \hline \overline{5}\ \ \overline{10} & 3. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1 & 10 & \\ \overline{\overline{3}} & 6 & \overline{\overline{3}} \\ \backslash\,\overline{3} & \backslash\,3 & \overline{3} \\ \backslash\,\overline{15} & \backslash & \overline{\overline{3}} \\ \hline \overline{3}\ \ \overline{15} & 4. & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & 10 \\ \backslash\,\overline{2} & \backslash\,5 \\ \hline \overline{2} & 5. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & 10 \\ \backslash\,\overline{2} & \backslash\ \ 5 \\ \backslash\,\overline{10} & \backslash\ \ 1 \\ \hline \overline{2}\ \ \overline{10} & 6. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1 & 10 & \\ \backslash\,\overline{\overline{3}} & \backslash\ \ 6 & \overline{\overline{3}} \\ \backslash\,\overline{30} & \backslash & \overline{3} \\ \hline \overline{\overline{3}}\ \ \overline{30} & 7. & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1 & 10 & \\ \backslash\,\overline{\overline{3}} & \backslash\ \ 6 & \overline{\overline{3}} \\ \backslash\,\overline{10} & \backslash\ \ 1 & \\ \backslash\,\overline{30} & \backslash & \overline{3} \\ \hline \overline{\overline{3}}\ \ \overline{10}\ \ \overline{30} & 8. & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1 & 10 & \\ \backslash\,\overline{\overline{3}} & \backslash & \overline{\overline{3}} \\ \backslash\,\overline{5} & \backslash\ \ 2 & \\ \backslash\,\overline{30} & \backslash & \overline{3} \\ \hline \overline{\overline{3}}\ \ \overline{5}\ \ \overline{30} & 9. & \end{array}$$

Según Gillings, los siguientes cálculos muestran cómo el resumen de los resutados que podrían haber sido derivadas por divisiones sencillas.

$\mathbf{\frac{1}{10}}$	$\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{4}{10}}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	$\mathbf{\frac{7}{10}}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$
$\mathbf{\frac{2}{10}}$	$\frac{1}{5}$	$\mathbf{\frac{5}{10}}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{8}{10}}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$
$\mathbf{\frac{3}{10}}$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{6}{10}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{9}{10}}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}$

Cuadro 4.3: Tabla de fracciones con denominador diez

Capítulo 5

TRADUCCIÓN DEL PAPIRO: DIVISIÓN DE 2 POR NÚMEROS IMPARES

Puesto que los matemáticos egipcios realizaron sus multiplicaciones sobre todo por duplicación o reducción a la mitad, era necesario que ellos debían ser capaces de duplicar cualquier cantidad numérica, un recíproco, así como un número entero. Esto podría hacerse fácilmente con el recíproco de un número par, pero para los números impares era conveniente tener al menos algunos de los resultados facilmente disponibles.
Resultados como los que figuran en la primera parte del papiro de Rhind conteniendo la duplicación de fracciones unitarias fue, posiblemente durante siglos y siglos, muy utilizada por los antiguos escribas egipcios en problemas de reparto y en todas aquellas operaciones con números fraccionarios. Lo que significa que probablemente ya conocían y utilizaban una espiecie de tabla de referencia desde tiempos inmemorables. Y el mérito de ello es que las sumas de recíprocos que aparecen en la misma es la más simple y acertada entre la enorme cantidad de posibilidades en que se puede descomponer cada una de las fracciones del tipo $\frac{2}{n}$.

> Se han descutido y debatido, por parte de historiadores de las matemáticas, muchas teorías acerca de cómo y por qué los escribas decidían las fracciones que aprecen en esa tablas. Si los valores de las tablas se obtuvieron por ensayo y error, o si obtienen de una regla particular, debemos reconocer que el Egipto antiguo construyó un buen conocimiento de los cien primeros enteros, de la tabla de duplicación y de ciertas igualdades aritméticas. [Guinnes, 1994, p. 38]

> Hoy en el siglo XX, casi 4.000 años después de que los egipcios primero idearon el sistema de fracciones, los matemáticos modernos han tratado de determinar qué principios y procesos los antiguos escribas egipcios utilizaron en la elaboración de la "tabla". [Gillings, 1972, p.47]

Gillings (1982) reconoce el valor que tenían para los egipcios las fracciones que hoy escribemos como de la forma $\frac{2}{n}$, siendo n impar y con valores entre 3 y 101.
En la transcripción de la primera parte del papiro de Rhind se entiende que los egipcios no tenían un método rápido y eficaz para realizar la descomposición, por lo que se limitaban a emplear tablas ya escritas o a efectuar el proceso de división emprendida. En la actualidad se conoce y es posible encontrar algoritmos para descomponer las fraciones. Los escribas egipcios representaban las fracciones como suma de fracciones unitarias distintas.

Se observa en el inicio del papiro de Rhind la fracción $\frac{2}{3}$, que los egipcios utilizaban con frecuencia la cual era representada a través de un símbolo hierático como si se trata de un patrón o referencia. Se sabe que los escribas disponían una "tabla de ferenecia" en la primera parte del papiro de Rhind para realizar cálculos laboriosos o rutinarios, de modo que su trabajo resulsultase más rápido.
La "tabla" del papiro de Rhind fue analizada y estudiada minuciosamente por Richard J. Gillings. [pp. 47-70]

$\mathbf{\frac{2}{5}}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	$\mathbf{\frac{2}{37}}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$	$\mathbf{\frac{2}{69}}$	$\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$
$\mathbf{\frac{2}{7}}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	$\mathbf{\frac{2}{39}}$	$\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$	$\mathbf{\frac{2}{71}}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710}$
$\mathbf{\frac{2}{9}}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	$\mathbf{\frac{2}{41}}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$	$\mathbf{\frac{2}{73}}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$
$\mathbf{\frac{2}{11}}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$	$\mathbf{\frac{2}{43}}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$	$\mathbf{\frac{2}{75}}$	$\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$
$\mathbf{\frac{2}{13}}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$	$\mathbf{\frac{2}{45}}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$	$\mathbf{\frac{2}{77}}$	$\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$
$\mathbf{\frac{2}{15}}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	$\mathbf{\frac{2}{47}}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$	$\mathbf{\frac{2}{79}}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}$
$\mathbf{\frac{2}{17}}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$	$\mathbf{\frac{2}{49}}$	$\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$	$\mathbf{\frac{2}{81}}$	$\frac{1}{54}+\frac{1}{162}$
$\mathbf{\frac{2}{19}}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$	$\mathbf{\frac{2}{51}}$	$\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$	$\mathbf{\frac{2}{83}}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$
$\mathbf{\frac{2}{21}}$	$\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$	$\mathbf{\frac{2}{53}}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$	$\mathbf{\frac{2}{85}}$	$\frac{1}{51}+\frac{1}{255}$
$\mathbf{\frac{2}{23}}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$	$\mathbf{\frac{2}{55}}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$	$\mathbf{\frac{2}{87}}$	$\frac{1}{58}+\frac{1}{174}$
$\mathbf{\frac{2}{25}}$	$\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$	$\mathbf{\frac{2}{57}}$	$\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$	$\mathbf{\frac{2}{89}}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$
$\mathbf{\frac{2}{27}}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$	$\mathbf{\frac{2}{59}}$	$\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$	$\mathbf{\frac{2}{91}}$	$\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$
$\mathbf{\frac{2}{29}}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$	$\mathbf{\frac{2}{61}}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$	$\mathbf{\frac{2}{93}}$	$\frac{1}{62}+\frac{1}{186}$
$\mathbf{\frac{2}{31}}$	$\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$	$\mathbf{\frac{2}{63}}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$	$\mathbf{\frac{2}{95}}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{380}\frac{1}{570}$
$\mathbf{\frac{2}{33}}$	$\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$	$\mathbf{\frac{2}{65}}$	$\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$	$\mathbf{\frac{2}{97}}$	$\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$
$\mathbf{\frac{2}{35}}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$	$\mathbf{\frac{2}{67}}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}$	$\mathbf{\frac{2}{99}}$	$\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$
				$\mathbf{\frac{2}{101}}$	$\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$

Cuadro 5.1: Resumen de la primera parte de Papiro de Rhind de la forma $\frac{2}{n}$

Las fracciones estan escritas en hierática, y fueron traducidas por el matemático Arnold Buffum Chace de la Brown University. Así se siguen una traducción de la primera parte del papiro de Rhind, que contiene la duplicación de las fracciones $\frac{2}{n}$, $n = 3, \ldots, 101$, que los egipcios representaban en hierática y escribían de derecha a izquierda, es decir la inversa que actualmente escribimos.

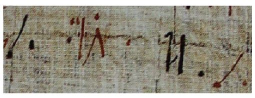
Para este trabajo si ha extraído imágenes de pedazos de papiro que contienen las fracciones escritos en hierática, con sus respectivas traducciones.

Se muestra en la columna derecha el pedazo de papiro que contiene la fracción y su traducción actual la descomposición en fracciones unitarias distintas. Se observa que la mayoria estan descompuestos a través del método de división y duplicación, en la columna izquierda está el otro pedazo de papiro que contiene el resultado de la descomposición en fracciones unitarias escrito de color rojo. Se incluín también de las pequiñas fraces que acompañan a algunos fracciones.

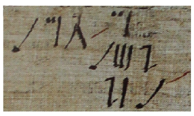
2 dividido por 3
Obtener 2 mediante una operación en 3. Es decir $\frac{2}{3}$ multiplicado por 3 es igual a 2.
Esta fracción fue utilizada con frecuencia como si se tratase un patrón o referencia.
De hecho que, la multiplicativa por esta fracción está explicada en parte 61B de papiro de Rhind, es probable que los escribas tenían la intención de escribir las reglas como referencia para otros problemas del papiro que consiste en la búsqueda de $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ de otras fracciones.

> Calcular $\frac{2}{3}$ de una fracción impar. Si te preguntan ¿cuánto es $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$? Entonces calculas dos veces de $\frac{1}{5}$ y 6 veces de $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$ es esto. Presta atención siempre tienes que hacer cada vez que tienes una fracción impar, cualquiera que sea su forma. [Gillings, 1972, p.29]

2 dividido por 5

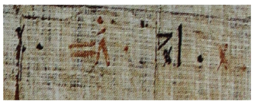


$\frac{1}{3}$ de 5 es 1 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{15}$ de 5 es $\frac{1}{3}$



$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	/	1	5	
			$\frac{2}{3}$	3	$\frac{1}{3}$
			$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$ /

2 dividido por 7



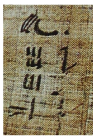
$\frac{1}{4}$ de 7 es 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{28}$ de 7 es $\frac{1}{4}$

1	7
2	14
4	28

1	7	
$\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	
\ $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	
\ 4	28	$\frac{1}{4}$.

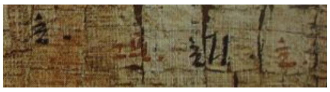
2 dividido por 9

$\frac{1}{6}$ de 9 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{18}$ de 9 es $\frac{1}{2}$



1	9	
$\frac{2}{3}$	6	
$\frac{1}{3}$	3	
\ $\frac{1}{6}$	1 $\frac{1}{2}$	
\ 2	18	$\frac{1}{2}$

2 dividido por 11

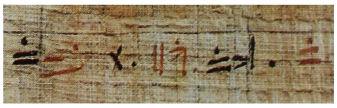


$\frac{1}{6}$ de 11 es 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{66}$ de 11 es $\frac{1}{6}$.

1	11	
$\frac{2}{3}$	7 $\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	3 $\frac{2}{3}$	
\ $\frac{1}{6}$	1 $\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

	1	11	
	\ 2	22	
	\ 4	44	
Total	6	66	$\frac{1}{6}$.

2 dividido por 13



$\frac{1}{8}$ de 13 es 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{52}$ de 13 es $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{104}$ de 13 es $\frac{1}{8}$

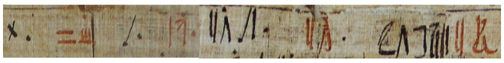
1	13	
$\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{4}$	3 $\frac{1}{4}$	
$\backslash\frac{1}{8}$	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$	
\4	52	$\frac{1}{4}$
\8	104	$\frac{1}{8}$

2 dividido por 15

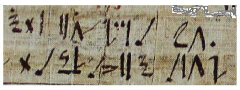
$\frac{1}{10}$ de 15 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{30}$ de 15 es $\frac{1}{2}$

1	15
$\backslash\frac{1}{10}$	1 $\frac{1}{2}$
$\backslash\frac{1}{30}$	$\frac{1}{2}$.

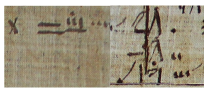
2 dividido por 17



Obtener 2 mediante una operación en 17. $\frac{1}{12}$ de 17 es 1 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{51}$ de 17 es $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{68}$ de 17 es $\frac{1}{4}$



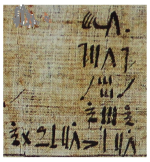
1	17
$\frac{2}{3}$	11 $\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	5 $\frac{2}{3}$
$\frac{1}{6}$	2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$
$\backslash\frac{1}{12}$	1 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$
Resto	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$



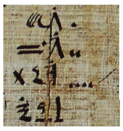
	\1	17	
	\2	34	
Total	3	51	$\frac{1}{3}$
	4	68	$\frac{1}{4}$.

2 dividido por 19

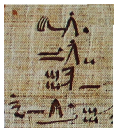
$\frac{1}{12}$ de 19 es 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{76}$ de 19 es $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{114}$ de 19 es $\frac{1}{6}$.



1	19
$\frac{2}{3}$	12 $\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	6 $\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$	3 $\frac{1}{6}$
$\backslash\frac{1}{12}$	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{12}$
Resto	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$

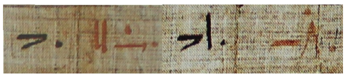


1	19	
2	38	
4	76	$\frac{1}{4}$
Resto	$\frac{1}{6}$	

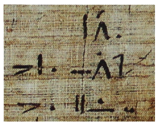


	1	19	
	\2	38	
	\4	76	
Total	6	114	$\frac{1}{6}$.

2 dividido por 21

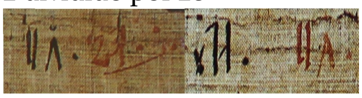


$\frac{1}{14}$ de 21 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{42}$ de 21 es $\frac{1}{2}$.

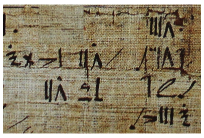


1	21	
$\backslash\frac{2}{3}$	14	1 $\frac{1}{2}$
\2	42	$\frac{1}{2}$.

2 dividido por 23



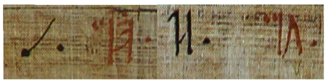
$\frac{1}{12}$ de 23 es 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{276}$ de 23 es $\frac{1}{12}$.

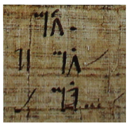


1	23
$\frac{2}{3}$	15 $\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	7 $\frac{2}{3}$
$\frac{1}{6}$	3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$
$\backslash\frac{1}{12}$	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$
Resto	$\frac{1}{12}$

	1	23	
	\10	230	
	\2	46	
Total	12	276	$\frac{1}{12}$.

2 dividido por 25

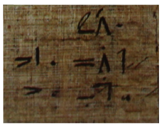




$\frac{1}{15}$ de 25 es 1 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{75}$ de 25 es $\frac{1}{3}$

1	25	
\\$\frac{1}{15}$	1 $\frac{2}{3}$	
\\3	75	$\frac{1}{3}$.

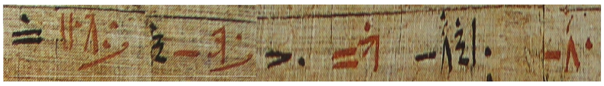
2 dividido por 27



$\frac{1}{18}$ de 27 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{54}$ de 27 es $\frac{1}{2}$

1	27	
\\$\frac{2}{3}$	18	1 $\frac{1}{2}$
\\2	54	$\frac{1}{2}$.

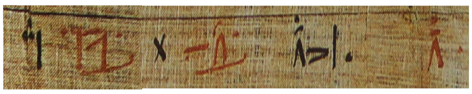
2 dividido por 29



Obtener 2 mediante una operación en 29. $\frac{1}{24}$ de 29 es 1 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{58}$ de 29 es $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{174}$ de 29 es $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{232}$ de 29 es $\frac{1}{8}$.

1	29	
\\$\frac{1}{24}$	1 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$	
\\2	58	$\frac{1}{2}$
\\6	174	$\frac{1}{6}$
\\8	232	$\frac{1}{8}$.

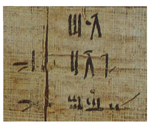
2 dividido por 31



$\frac{1}{20}$ de 31 es 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{124}$ de 31 es $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{155}$ de 31 es $\frac{1}{5}$.

1	31	
\\$\frac{1}{20}$	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{20}$	
\\4	124	$\frac{1}{4}$
\\5	155	$\frac{1}{5}$.

2 dividido por 33



$\frac{1}{22}$ de 33 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{66}$ de 33 es $\frac{1}{2}$.

1	33	
\\$\frac{2}{3}$	22	1 $\frac{1}{2}$
\\2	66	$\frac{1}{2}$

2 dividido por 35

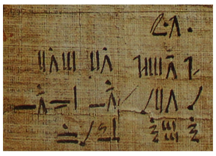
35. $\frac{1}{30}$ *de* 35 *es* 1 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{42}$ *de* 35 *es* $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$
6 7 5

2 veces $\frac{1}{35}$ es $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{42}$. Para $\frac{1}{35}$ aplicado a 210 da 6; y 2 veces 6 es 12, o 7 y 5, que son $\frac{1}{30}$ y $\frac{1}{42}$ de 210.

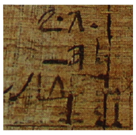
1	35
\ $\frac{1}{30}$	1 $\frac{1}{6}$
\ $\frac{1}{42}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$.

2 dividido por 37

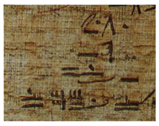
$\frac{1}{24}$ de 37 es 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{111}$ de 37 es $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{296}$ de 37 es $\frac{1}{8}$



1	37
$\frac{2}{3}$	24 $\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	12 $\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$	6 $\frac{1}{6}$
$\frac{1}{12}$	3 $\frac{1}{12}$
\ $\frac{1}{24}$	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{24}$
Resto	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{8}$



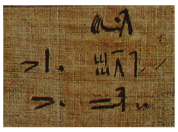
	\1	37	
	\2	74	
Total	3	111	$\frac{1}{3}$
	Resto	$\frac{1}{8}$	



1	37
2	74
4	148
8	296 $\frac{1}{8}$.

2 dividido por 39

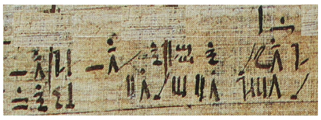
$\frac{1}{26}$ de 39 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{78}$ de 39 es $\frac{1}{2}$



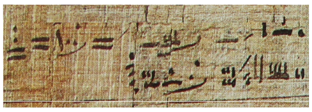
1	39	
\ $\frac{2}{3}$	26	1 $\frac{1}{2}$
\2	78	$\frac{1}{2}$

2 dividido por 41

Obtener 2 mediante una operación en 41. $\frac{1}{24}$ de 41 es 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{246}$ de 41 es $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{328}$ de 41 es $\frac{1}{8}$

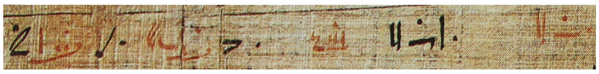


1	41
$\frac{2}{3}$	27 $\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	13 $\frac{2}{3}$
$\frac{1}{6}$	6 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$
$\frac{1}{12}$	3 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{12}$
\ $\frac{1}{24}$	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{24}$
Resto	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{8}$



	1	41	
	\2	82	
	\4	164	
Total	6	246	$\frac{1}{6}$
	8	328	$\frac{1}{8}$

2 dividido por 43

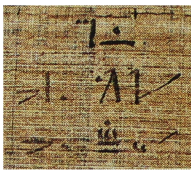


$\frac{1}{42}$ de 43 es 1 $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{86}$ de 43 es $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{129}$ de 43 es $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{301}$ de 43 es $\frac{1}{7}$

	1	43	
encontrar	\ $\frac{1}{42}$	1 $\frac{1}{42}$	
	\2	86	$\frac{1}{2}$
	\3	129	$\frac{1}{3}$
	\7	301	$\frac{1}{7}$

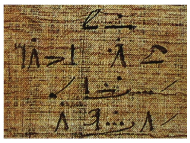
2 dividido por 45

$\frac{1}{30}$ de 45 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{90}$ de 45 es $\frac{1}{2}$



1	45	
\ $\frac{2}{3}$	30	1 $\frac{1}{2}$
\2	90	$\frac{1}{2}$

2 dividido por 47



$\frac{1}{30}$ de 47 es 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{141}$ de 47 es $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{470}$ de 47 es $\frac{1}{10}$

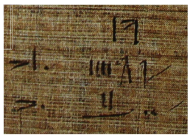
	1	47	
Encontrar	$\frac{1}{30}$	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{15}$	
	\3	141	$\frac{1}{3}$
	\10	470	$\frac{1}{10}$

2 dividido por 49

$\frac{1}{28}$ de 49 es 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{196}$ de 49 es $\frac{1}{4}$

	1	49	
Encontrar	\\$\frac{1}{28}$	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	
	\4	196	$\frac{1}{4}$.

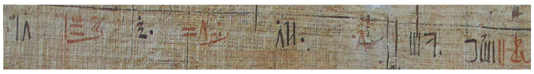
2 dividido por 51



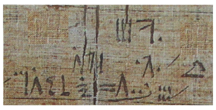
$\frac{1}{34}$ de 51 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{102}$ de 51 es $\frac{1}{2}$

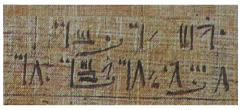
1	51	
\\$\frac{2}{3}$	34	1 $\frac{1}{2}$
\2	102	$\frac{1}{2}$

2 dividido por 53



Obtener 2 mediante una operación en 53. $\frac{1}{30}$ de 53 es 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{318}$ de 53 es $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{795}$ de 53 es $\frac{1}{15}$

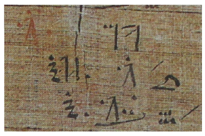




	1	53	
Encontrar	\\$\frac{1}{30}$	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{10}$	
	\6	318	$\frac{1}{6}$
	Resto	$\frac{1}{15}$	

	1	53	
	10	530	
	5	265	
Total	15	795	$\frac{1}{15}$

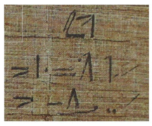
2 dividido por 55



$\frac{1}{30}$ de 55 es $1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}$, $\frac{1}{330}$ de 55 es $\frac{1}{6}$

Encontrar	1	55	
	$\backslash\frac{1}{30}$	$1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}$	
	$\backslash 6$	330	$\frac{1}{6}$

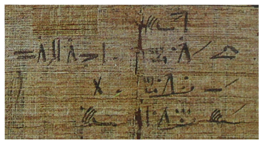
2 dividido por 57



$\frac{1}{38}$ de 57 es $1\ \frac{1}{2}$, $\frac{1}{114}$ de 57 es $\frac{1}{2}$

1	57	
$\backslash\frac{2}{3}$	38	$1\ \frac{1}{2}$
$\backslash 2$	114	$\frac{1}{2}$

2 dividido por 59



$\frac{1}{36}$ de 59 es $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{18}$, $\frac{1}{236}$ de 59 es $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{531}$ de 59 es $\frac{1}{9}$.

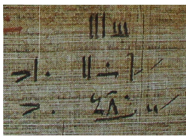
Encotrar	1	59	
	$\backslash\frac{1}{36}$	$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{18}$	
	$\backslash 4$	236	$\frac{1}{4}$
	$\backslash 9$	531	$\frac{1}{9}$

2 dividido por 61

$\frac{1}{40}$ de 61 es $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{40}$, $\frac{1}{244}$ de 61 es $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{488}$ de 61 es $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{610}$ de 61 es $\frac{1}{10}$

Encontrar	1	61	
	$\backslash\frac{1}{40}$	$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{40}$	
	$\backslash 4$	244	$\frac{1}{4}$
	$\backslash 8$	488	$\frac{1}{8}$
	$\backslash 10$	610	$\frac{1}{10}$.

2 dividido por 63



$\frac{1}{42}$ de 63 es $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{126}$ de 63 es $\frac{1}{2}$

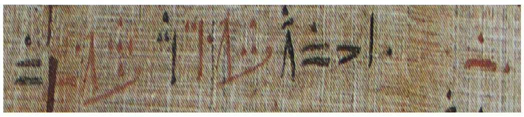
$$\begin{array}{lll} 1 & 63 & \\ \backslash\frac{2}{3} & 42 & 1\ \frac{1}{2} \\ \backslash 2 & 126 & \frac{1}{2}. \end{array}$$

2 dividido por 65

Obtener 2 mediante una operación en 65. $\frac{1}{39}$ de 65 es 1 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{195}$ de 65 es $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{llll} & 1 & 65 & \\ \textit{Encontrar} & \backslash\frac{1}{39} & 1\ \frac{2}{3} & \\ & \backslash 3 & 195 & \frac{1}{3} \end{array}$$

2 dividido por 67



$\frac{1}{40}$ de 67 es 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{335}$ de 67 es $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{536}$ de 67 es $\frac{1}{8}$

$$\begin{array}{llll} & 1 & 67 & \\ \textit{Encontrar} & \backslash\frac{1}{40} & 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{20} & \\ & \backslash 5 & 335 & \frac{1}{5} \\ & \backslash 8 & 536 & \frac{1}{8} \end{array}$$

2 dividido por 69

$\frac{1}{46}$ de 69 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{138}$ de 69 es $\frac{1}{2}$

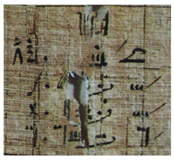
$$\begin{array}{lll} 1 & 69 & \\ \backslash\frac{2}{3} & 46 & 1\ \frac{1}{2} \\ \backslash 2 & 138 & \frac{1}{2} \end{array}$$

2 dividido por 71

$\frac{1}{40}$ de 71 es 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{568}$ de 71 es $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{710}$ de 71 es $\frac{1}{10}$.

$$\begin{array}{llll} & 1 & 71 & \\ \textit{Encontrar} & \backslash\frac{1}{40} & 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{40}, & \\ & \backslash 8 & 568 & \frac{1}{8} \\ & \backslash 10 & 710 & \frac{1}{10} \end{array}$$

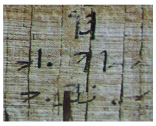
2 dividido por 73

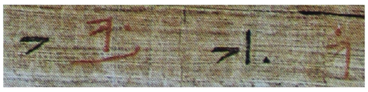


$\frac{1}{60}$ de 73 es 1 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{219}$ de 73 es $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{292}$ de 73 es $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{365}$ de 73 es $\frac{1}{5}$.

	1	73	
Encontrar	\\$\frac{1}{60}$	1 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{20}$	
	\\3	219	$\frac{1}{3}$
	\\4	292	$\frac{1}{4}$
	\\5	365	$\frac{1}{5}$.

2 dividido por 75

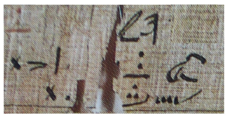


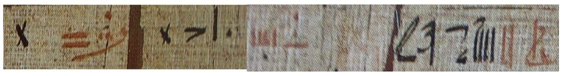


$\frac{1}{50}$ de 75 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{150}$ de 75 es $\frac{1}{2}$

1	75	
\\$\frac{2}{3}$	50	1 $\frac{1}{2}$
\\2	150	$\frac{1}{2}$.

2 dividido por 77

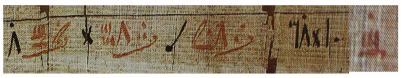




Obtener 2 mediante una operación en 77. $\frac{1}{44}$ de 77 es 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{308}$ de 77 es $\frac{1}{4}$.

	1	77	
Encontrar	\\$\frac{1}{44}$	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	
	\\4	308	$\frac{1}{4}$

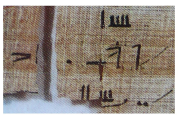
2 dividido por 79



$\frac{1}{60}$ de 79 es 1 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{237}$ de 79 es $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{316}$ de 79 es $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{790}$ de 79 es $\frac{1}{10}$

	1	79	
Encontrar	\\$\frac{1}{60}$	1 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{15}$	
	\\3	237	$\frac{1}{3}$
	\\4	316	$\frac{1}{4}$
	\\10	790	$\frac{1}{10}$

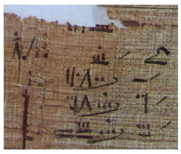
2 dividido por 81



$\frac{1}{54}$ de 81 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{162}$ de 81 es $\frac{1}{2}$

1	81	
\\$\frac{2}{3}$	54	1 $\frac{1}{2}$
\\2	162	$\frac{1}{2}$

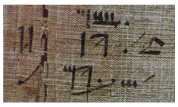
2 dividido por 83



$\frac{1}{60}$ de 83 es 1 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{332}$ de 83 es $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{415}$ de 83 es $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{498}$ de 83 es $\frac{1}{6}$.

	1	83	
Encontrar	$\backslash\frac{1}{60}$	1 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{20}$	
	\4	332	$\frac{1}{4}$
	\5	415	$\frac{1}{5}$
	\6	498	$\frac{1}{6}$.

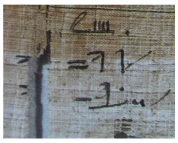
2 dividido por 85



$\frac{1}{51}$ de 85 es 1 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{255}$ de 85 es $\frac{1}{3}$

	1	85	
Encontrar	$\frac{1}{51}$	1 $\frac{2}{3}$	
	3	255	$\frac{1}{3}$.

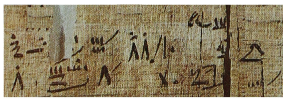
2 dividido por 87



$\frac{1}{58}$ de 87 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{174}$ de 87 es $\frac{1}{2}$

1	87	
$\backslash\frac{2}{3}$	58	1 $\frac{1}{2}$
\2	174	$\frac{1}{2}$

2 dividido por 89



Obtener 2 mediante una operación en 89.
$\frac{1}{60}$ de 89 es 1 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{356}$ de 89 es $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{534}$ de 89 es $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{890}$ de 89 es $\frac{1}{10}$.

	1	89	
Encontrar	$\backslash\frac{1}{50}$	1 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{20}$	
	\4	356	$\frac{1}{4}$
	\6	354	$\frac{1}{6}$
	\10	890	$\frac{1}{10}$

2 dividido por 91

$\frac{1}{70}$ de 91 es $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{130}$ de 91 es $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{30}$

	1	91
Encontrar	$\backslash\frac{1}{70}$	1 $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{10}$
Encontrar	$\backslash\frac{1}{130}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{30}$

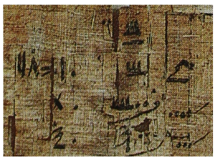
2 dividido por 93

$\frac{1}{62}$ de 93 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{186}$ de 93 es $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{llll} & 1 & 93 & \\ \textit{Encontrar} & \backslash\frac{2}{3} & 62 & 1\ \frac{1}{2} \\ & \backslash 2 & 186 & \frac{1}{2} \end{array}$$

2 dividido por 95

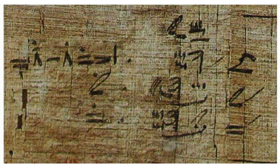
$\frac{1}{60}$ de 95 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{380}$ de 95 es $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{570}$ de 95 es $\frac{1}{6}$



$$\begin{array}{llll} & 1 & 95 & \\ \textit{Encontrar} & \backslash\frac{1}{60} & 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{12} & \\ & \backslash 4 & 380 & \frac{1}{4} \\ & \backslash 6 & 570 & \frac{1}{6} \end{array}$$

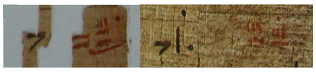
2 dividido por 97

$\frac{1}{56}$ de 97 es 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{28}$, $\frac{1}{679}$ de 97 es $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{776}$ de 97 es $\frac{1}{8}$



$$\begin{array}{llll} & 1 & 97 & \\ \textit{Encontrar} & \backslash\frac{1}{56} & 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{28} & \\ & \backslash 7 & 679 & \frac{1}{7} \\ & \backslash 8 & 776 & \frac{1}{8} \end{array}$$

2 dividido por 99



$\frac{1}{66}$ de 99 es 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{198}$ de 99 es $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{llll} & 1 & 99 & \\ \textit{Encontrar} & \backslash\frac{2}{3} & 66 & 1\ \frac{1}{3} \\ & \backslash 2 & 198 & \frac{1}{6}. \end{array}$$

2 dividido por 101
Obtener 2 mediante una operación en 101. $\frac{1}{101}$ de 101 es 1, $\frac{1}{202}$ de 101 es $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{303}$ de 101 es $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{606}$ de 101 es $\frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{lll} \backslash 1 & 101 & 1 \\ \backslash 2 & 202 & \frac{1}{2} \\ \backslash 3 & 303 & \frac{1}{3} \\ \backslash 6 & 606 & \frac{1}{6}. \end{array}$$

5.1. Posibles métodos utilizados en la elaboración de la “tabla”.

Los investigadores han desarrollado algunas ideas sobre los posibles métodos que se utilizaron para descomponer un número racional en fracciones unitarias distintas. Algunos investigadores sugieren que fue una mezcla de procedimientos y otros que se siguió un único método sistemático, e incluso otros autores sugieren que la descomposición se realizó en un periodo de unos varios años como consecuencia de la experiencia en el manejo de los números fraccionarios.

Una de las ideas más interesantes es el desarrollo de las fracciones cuyo denominadores es múltiplo de 3, como $\frac{2}{9}, \frac{2}{15}, \frac{2}{21}, \frac{2}{27}$, etc. pues en todo estos casos, la solución vendría dada a partir de la siguiente igualdad: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, de tal manera que para obtener cualquiera de las fracciones unitarias bastará multiplicar todos los denominadores por un números determinado, de hecho que tenemos:

$$\frac{2}{3k} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$$

Por lo tanto, con este método puede explicarse 16 casos de los 50 que aparecen en la “tabla”. Por ejemplo se puede ver en la siguiente línea la descomposición de fracciones con denomidores múltiplos de 3 en suma de fracciones unitarias:

$$\mathbf{\frac{2}{9}} = \frac{2}{3\times3} = \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{6\times3} \Rightarrow \frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

$$\mathbf{\frac{2}{15}} = \frac{2}{3\times5} = \frac{1}{2\times5} + \frac{1}{6\times5} \Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

$$\mathbf{\frac{2}{21}} = \frac{2}{3\times7} = \frac{1}{2\times7} + \frac{1}{6\times7} \Rightarrow \frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$$

$$\mathbf{\frac{2}{27}} = \frac{2}{3\times9} = \frac{1}{2\times9} + \frac{1}{6\times9} \Rightarrow \frac{2}{27} = \frac{1}{18} + \frac{1}{54}$$

$$\mathbf{\frac{2}{33}} = \frac{2}{3\times11} = \frac{1}{2\times11} + \frac{1}{6\times11} \Rightarrow \frac{2}{33} = \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$$

$$\mathbf{\frac{2}{39}} = \frac{2}{3\times13} = \frac{1}{2\times13} + \frac{1}{6\times13} \Rightarrow \frac{2}{39} = \frac{1}{26} + \frac{1}{78}$$

$$\mathbf{\frac{2}{45}} = \frac{2}{3\times15} = \frac{1}{2\times15} + \frac{1}{6\times15} \Rightarrow \frac{2}{45} = \frac{1}{30} + \frac{1}{90}$$

$$\mathbf{\frac{2}{51}} = \frac{2}{3\times17} = \frac{1}{2\times17} + \frac{1}{6\times17} \Rightarrow \frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$$

$$\mathbf{\frac{2}{57}} = \frac{2}{3\times19} = \frac{1}{2\times19} + \frac{1}{6\times19} \Rightarrow \frac{2}{57} = \frac{1}{38} + \frac{1}{114}$$

$$\mathbf{\frac{2}{63}} = \frac{2}{3\times21} = \frac{1}{2\times21} + \frac{1}{6\times21} \Rightarrow \frac{2}{63} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$$

$$\mathbf{\frac{2}{69}} = \frac{2}{3\times23} = \frac{1}{2\times23} + \frac{1}{6\times23} \Rightarrow \frac{2}{69} = \frac{1}{46} + \frac{1}{138}$$

$$\mathbf{\frac{2}{75}} = \frac{2}{3\times25} = \frac{1}{2\times25} + \frac{1}{6\times25} \Rightarrow \frac{2}{75} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150}$$

$$\mathbf{\frac{2}{81}} = \frac{2}{3\times27} = \frac{1}{2\times27} + \frac{1}{6\times27} \Rightarrow \frac{2}{81} = \frac{1}{54} + \frac{1}{162}$$

$$\mathbf{\frac{2}{87}} = \frac{2}{3\times29} = \frac{1}{2\times29} + \frac{1}{6\times29} \Rightarrow \frac{2}{87} = \frac{1}{58} + \frac{1}{174}$$

$$\mathbf{\frac{2}{93}} = \frac{2}{3\times31} = \frac{1}{2\times31} + \frac{1}{6\times31} \Rightarrow \frac{2}{93} = \frac{1}{62} + \frac{1}{186}$$

$$\mathbf{\frac{2}{99}} = \frac{2}{3\times33} = \frac{1}{2\times33} + \frac{1}{6\times33} \Rightarrow \frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$$

Los demás fracciones que no tienen denominadores múltiplo de 3 se pueden descomponer a traves del método de la división, múltiplicacion. También en los parágrafos que siguen reflixionemos sobre estos preceptos propuestos por [Gillings, 1972, p. 29]:

1. De todas las descomposiciones posibles se escoge aquella de denominadores más pequeños, que nunca pueden exceder de mil.
2. Una descomposición en dos sumandos es preferible a una de cuatro. El número de sumandos no puede exceder de cuatro.
3. Las fracciones que aparecen colocadas en orden decreciente sin repetirse ninguna.
4. El denominador de la primera fracción es lo más pequeño posible, pero si puede admitir uno ligeramente mayor si eso permite reducir el de la última.
5. Los números pares son preferibles a los impares, aun a costa de aumentar el primer denomidador o el número de sumandos.

Todas las fracciones que se expresan como suma de fracciones unitarias lo hacen según el siguiente procedimiento (excepto $\frac{2}{35}, \frac{2}{91}$) [Moreno, 2012, P. 63-80].

Se intenta econtrar x, y tales que $\frac{2}{n} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{ny}$. Entonces x, y son tales que $n = x(2y-1)$. Se busca x, y de tal modo que los denominadores que se obtienen sean los más pequeños posibles.
Cada descomposición de n en dos factores proporciona una expresión de $\frac{2}{n}$ como suma de dos fracciones unitarias distintas (salvo la posibilidad $n = x$ y $2y - 1 = 1$, que da lugar a dos fracciones iguales). Se calcula todas las posibilidades que se desprenden de la fórmula y se elige la que corresponde a la x de mayor valor y a la y de menor valor. Para esto basta tomar como x al mayor divisor propio de n.

Ejemplo.

La fracción $\mathbf{\frac{2}{7}}$

x	2y-1	y	xy	7y
1	7	4	**4**	**28**

La fracción $\mathbf{\frac{2}{25}}$

x	2y-1	y	xy	25y
1	25	13	13	325
5	5	3	**15**	**75**

Para una fracción que no sigue la regla anterior se hace según la fórmula:

$$\frac{2}{xy} = \frac{1}{x(x+y)/2} + \frac{1}{y(x+y)/2}$$

La fracción $\frac{2}{39}$

x	2y-1	y	xy	39y
1	39	20	20	780
3	13	7	21	273
13	3	2	**26**	**78**

Fracciones que se expresan como suma de tres facciones unitarias lo haecen según el modelo siguiente (salvo $\frac{2}{95}$):

$$\frac{2}{n} = \frac{t}{xy} + \frac{1}{xn} + \frac{1}{yn}$$

Por lo tanto.

$$(2x-1)(2y-1) = 2nt+1$$

Fracción $\frac{2}{71}$

t	142t+1	2x-1	2y-1	x	y	(xy)/t	71x	71y
1	143	11	13	6	7	42	426	497
2	285	3	95	2	48	48	142	3408
2	285	15	19	8	10	**40**	**568**	**710**

Todas las fracciones de la tabla que se expresan como suma de cuatro fracciones unitarias se hacen (salvo $\frac{2}{101}$) según la esquema siguiente:

$$\frac{2}{n} = \frac{t}{xyz} + \frac{1}{xn} + \frac{1}{yn} + \frac{1}{zn}$$

Por lo tanto.

$$(3y-2)(3z-2) = 3nt+4.$$

Para cada t que convierta al segundo miembro en un número compuesto, y para cada descomposición de éste para lo cual t sea divisor común de x, y, z, habrá una expresión de $\frac{2}{n}$ como suma de cuatro fracciones unitarias.

Para fracción $\frac{2}{83}$:

Si hacemos $x = 2$, para $t = 4$ tenemos:

$\frac{2}{83} = \frac{1}{68} + \frac{1}{166} + \frac{1}{332} + \frac{1}{2822}$

Si $x = 3$, para $t = 3$ tenemos esta otra:

$\frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{249} + \frac{1}{415} + \frac{1}{996}$

Ambas son obviamente desechadas. Para $x = 4$ hagamos la tabla:

t	581t+16	7y-4	7z-4	y	z	(xyz)/t	83x	83y	83z
1	597								
2	1178	38	38	5	6	60	332	415	498

Algunos autores suponen que la “tabla” inicial del papiro de Rhind es el resultado de años de trabajo, de un conjunto de intentos de tanteos, de descubrimiento de procedimientos y su extensión a otros resultados. Si se coloca la “tabla” desde el punto de vista del proceso de construcción antes que sobre los resultados, se tiene la impresión de que existen diversos procedimientos y que, con el tiempo, algunos se fueron mejorando y se extendieron, de tal manera que el resultado final presentado en la “tabla” posiblemente fue fruto de años de experiencia en el manejo de las operaciones con las fracciones.

Capítulo 6

PROBLEMAS CURIOSOS SOBRE FRACCIONES UNITARIAS

> Hay dos resultados principales que obtenemos a partir del estudio de las matemáticas egipcias. El primero consiste en el establecimiento del hecho de que todo el procedimiento de matemáticas egipcias es esencialmente aditivo. El segundo resultado se refiere a una visión más profunda en el desarrollo de la computación con fracciones. [Neugebauer, 1969b, P. 73]

En este capítulo vamos a ver un método que describe la descomposición de fracciones egipcias en una suma de fracciones unitarias, que remonta por lo menos a Fibonacci.
Segundo lugar es descrito un problema en abierto sobre las fracciones egipcias, la conjetura de Erdös-Straus. Según esta conjetura se puede descomponer las fracciones de la forma $\frac{4}{n}$ a lo más en suma de tres fracciones unitarias.

6.1. Algoritmo de Fibonacci

En los capítulos VI y VII de su libro "Liber Abaci", Fibonacci trata sobre las fracciones y sobre su descomposición en una suma de fracciones unitarias. El matemático inglés James Joseph Sylvester, basando en método plantiado por Fibonacci, estableció un algoritmo para escribir cualquier fracción entre 0 y 1 como una suma de fracciones unitarias que vamos describir lo siguiente. [Fibonacci and Sigler, 2003]

Partiendo de una fracción propia $\frac{p}{n}, p < n$ sabemos que existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $n = pq + r$, con $r < p$; esto es el algoritmo de la división [Moreno Castillo, 2007].

Por lo tanto:

$$\frac{p}{n} = \frac{p}{pq+r} = \frac{1}{q+(\frac{r}{p})}.$$

Si $r = 0$, entonces $\frac{p}{n}$ ya es una fracción unitaria. Si $r \neq 0$, entonces, como $\frac{r}{p} < 1$, se tiene siguinte resultado:

$$\frac{1}{q+1} < \frac{p}{n} < \frac{1}{q}$$

Por lo tanto, la fracción unitaria más cerca a $\frac{p}{n}$ es $\frac{1}{q+1}$. Calculemos la diferencia de ambas:

$$\frac{p}{n} - \frac{1}{q+1} = \frac{p(q+1)-n}{n(q+1)} = \frac{p(q+1)-(pq+r)}{n(q+1)} = \frac{p-r}{n(q+1)};$$

es decir,

$$\frac{p}{n} = \frac{1}{q+1} + \frac{p-r}{n(q+1)}.$$

Así tenemos la fracción original expresada como la suma de una fracción unitaria y una fracción cuyo numerador es menor que el numerador de la fracción original. Si repetimos el proceso para la fracción $\frac{p-r}{n(q+1)}$ llegaremos a obtener la siguiente fracción unitaria. Así continuamos el procedimiento hasta que la última fracción obtenida tenga numerador igual a la unidad. Este procedimiento tiene que terminar ya que los numeradores están disminuido, pues $p - r < p$ mientras que $r > 0$.

Ejemplo 1: $\frac{5}{17} = \frac{5}{3\times5+2} = \frac{1}{3+(\frac{2}{5})} > \frac{1}{4}$;

$\frac{5}{17} - \frac{1}{4} = \frac{3}{68} = \frac{3}{22\times3+2} = \frac{1}{22+(\frac{2}{3})} > \frac{1}{23}$;

$\frac{3}{68} - \frac{1}{23} = \frac{1}{1564}$.

Por lo tanto:

$\frac{5}{17} = \frac{1}{4} + \frac{1}{23} + \frac{1}{1564}$

En los siguientes ejemplos utilizamos la calculadora para calcular la fracción unitaria más próximo a la fracción original, pero siguiendo el mismo procedimiento del ejemplo1.

Ejemplo 2: $\frac{26}{27}$

$\frac{27}{26} = 1,03...$

Así el número entero mayor más cerca y por encima de $\frac{26}{27}$ es 2. En consecuencia, la primera fracción unitaria más cerca y menor a $\frac{26}{27}$ es $\frac{1}{2}$.

$\frac{26}{27} - \frac{1}{2} = \frac{25}{54}$

$\frac{54}{25} = 2,16$

De la misma manera obtenemos ahora el número entero 3, y en consecuencia la segunda fracción unitaria más cerca a $\frac{25}{54}$ es $\frac{1}{3}$.

$\frac{25}{54} - \frac{1}{3} = \frac{21}{162}$

$\frac{162}{21} = 7,71...$

En este tercero paso obtenemos el número entero más próximo 8 y en consecuencia la fracción unitaria más cerca a $\frac{21}{162}$ es $\frac{1}{8}$.

$\frac{21}{162} - \frac{1}{8} = \frac{6}{1296}$

$\frac{1296}{6} = 216$

Como esta última división resulta un número entero, entonces la cuarta fracción unitaria final es $\frac{1}{216}$. Por lo tanto llegamos a descomponer $\frac{26}{27}$ a una suma de fracciones unitarias egipcias :
$\frac{26}{27} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{216}$

Este algoritmo de Fibonacci puede ser implementado con el sistema de álgebra computacional PARI/GP del siguiente modo.

Algoritmo de Fibonacci

```
fib(n)={local(t,r);
        r=[];
        while(n>0,t=ceil(1/n); n=n-1/t;r=concat(r,[1/t]));
        return(r);
                 }
```

Este algoritmo expresa una fracción cualquiera $n = \frac{a}{b}$ entre 0 y 1, es decir $0 < \frac{a}{b} < 1$, en una suma de fracciones unitarias egipcias del modo que pasamos a explicar.

1. Si crea una lista $r = []$, que comienza por ser vacia, y donde serán colocados las sucesivas de fracciones unitarias de la descomposición.

2. En cuanto la fracción obtenida en la memoria n si es mayor que cero, se obtiene el número entero más cerca, por encima a la $\frac{1}{n}$, $t = \left\lceil \frac{1}{n} \right\rceil$. Entonces, como $t - 1 < \frac{1}{n} \leq t$ es equivalente a $\frac{1}{t} \leq n < \frac{1}{t-1}$. Se tiene que $\frac{1}{t}$ es la fracción unitaria más cerca, por de bajo, a n, y por lo tanto es la fracción que vamos a guardar en r. Al mismo tiempo n es sustituido por $n - \frac{1}{t}$ y el procedimiento continúa hasta que n sea cero, en cuyo caso si obtine una lista de fracciones unitarias cuya suma es n, almacenadas en r.

3. Finalmente se imprime r.

   Ejemplo:
   Si $n = \frac{5}{17}$, el número entero más cerca y arriba, a $\frac{17}{5}$ es $t = \left\lceil \frac{17}{5} \right\rceil = 4$, es decir $\frac{1}{4} < \frac{5}{17} < \frac{1}{3}$. Por lo tanto $\frac{1}{4}$ es la fracción más próximo, a n y es la primera en la lista de r.
   Ahora $n = \frac{5}{17} - \frac{1}{4} = \frac{3}{68}$. Entonces el nuevo valor de $n = \frac{3}{68}$, lleva a $t = \left\lceil \frac{68}{3} \right\rceil = 23$ y entonces $r = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{23} \right]$.
   Finalmente, $n = \frac{3}{68} - \frac{1}{23} = \frac{1}{1564}$, como este resultado tiene numerador igual a la unidad, el procedimiento se termina.
   La lista final es $r = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{23}, \frac{1}{1564} \right]$ y por lo tanto se tiene $\frac{5}{17} = \frac{1}{4} + \frac{1}{23} + \frac{1}{1564}$.

Aplicación del algoritmo de Fibonacci con el sistema de álgebra computacional PARI/GP.

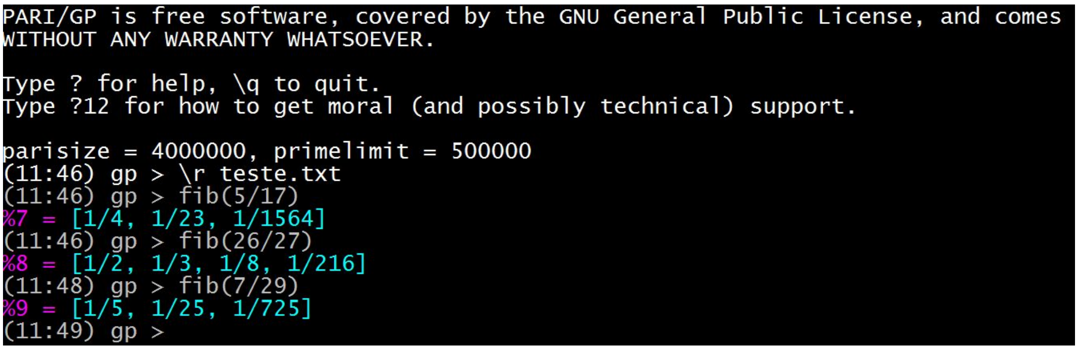


Figura 6.1: Algunos ejemplos de aplicación con PARI/GP

6.2. Conjetura de Erdös-Straus

Como vimos todas las fracciones se pueden escribir como una suma de fracciones unitarias. Es claro que una fracción de la forma $\frac{4}{n}$ si puede escribir como una suma de cuatro fracciones, se si pueden repitir. ¿Pero será que se puede escribir con mesmos que cuatro? Algunos, por supuesto que sí. Por ejemplo $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$. ¿Pero será que es siempre posible?.
Los matemáticos Paul Erdös y E.G. Straus han proponiedo la conjetura que es siempre posible escribir una fracción de la forma $\frac{4}{n}$ en una suma de tres fracciones unitarias. [1]
Más precisamente, ellos conjeturaron que para todos los números enteros $n \geq 2$ existen siempre $x, y, z \in \mathbf{N}$ tales que:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Pero hasta el momento nadie ha demostrado si es cierta para todos los valores de n, ni nadie ha encontrado un número n para lo cual se no es cierto.

Observación: Para demostrar la conjetura basta mostar que esta es verdadera para todos los números primos. Esto puede ser visto siguiente modo.
Suponemos que la conjetura sea verdadera para todos los primos. Si $n \in \mathbf{N}$, entonces $n \geq 2$, $n = kp$ para algún número primo p y algún $k \in \mathbf{N}$. Siendo la conjetura verdadera para los primos, eso implica que existen $a, b, c \in \mathbf{N}$ tales que se cumple:

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}:$$

Pero entonces:

$$\frac{4}{n} = \frac{4}{kp} = \frac{1}{ka} + \frac{1}{kb} + \frac{1}{kc}.$$

Y por lo tanto $\frac{4}{n}$ es suma de tres fracciones unitarias, o sea la conjetura será verdadera para n.
Algunos métodos sencillos permiten obtener la descomposición de $\frac{4}{n}$ para algunos números n.
Ejemplo 1: La descomposición de $\frac{4}{13}$ en tres fracciones unitarias puede ser obtenida por ejemplo del siguiente modo.
$\frac{4}{13} = \frac{4\times 4}{4\times 13} = \frac{13+2+1}{4\times 13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\times 13} + \frac{1}{4\times 13}$
$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52}$

Ejemplo 2:

$\frac{4}{15} = \frac{6\times 4}{6\times 15} = \frac{24}{6\times 15} = \frac{18+5+1}{6\times 15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3\times 6} + \frac{1}{6\times 15}$

$\frac{4}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{18} + \frac{1}{90}$

Utilizando una calculadora o computadora, se puede ver que se puenden encontrar muchas maneras de elegir los enteros x, y, z, que permiten escribir $\frac{4}{n}$ como suma de tres fracciones unitarias.

Ejemplos:

$\mathbf{\frac{4}{5}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{4}{7}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{15}+\frac{1}{210}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{112}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{18}+\frac{1}{63}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{21}+\frac{1}{42}$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{4}{9}}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{90}$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}$
$\mathbf{\frac{4}{11}}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{34}+\frac{1}{1122}$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{36}+\frac{1}{396}$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{154}$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{44}+\frac{1}{132}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{396}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{44}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{22}+\frac{1}{33}$	$\mathbf{\frac{4}{15}}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{61}+\frac{1}{3660}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{62}+\frac{1}{1860}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{63}+\frac{1}{1260}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{64}+\frac{1}{960}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{65}+\frac{1}{780}$ $\frac{1}{5}+\frac{1}{18}+\frac{1}{90}$	$\mathbf{\frac{4}{13}}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{468}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{130}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{26}+\frac{1}{52}$ $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{130}$

Cuadro 6.1: Ejemplos de suma de tres fracciones unitarias [3]

Algunos familares infinitas de fracciones de la forma $\frac{4}{n}$ pueden ser descompuestas en una suma de tres fracciones unitarias de siguiente manera.

1. Para múltiplos de 3: $\frac{4}{3k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3k}$

   Ejemplo: $\frac{4}{21} = \frac{4}{3\times 7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{21}$

2. Para los números de la forma $4k-1$:
   $\frac{4}{4k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(4k-1)}$

   Ejemplo: $\frac{4}{19} = \frac{4}{4\times 5-1} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5(19)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{95}$

3. Para números de la forma $3n-1$: $\frac{4}{3n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{n(3n-1)}$

   Ejemplo: $\frac{4}{17} = \frac{4}{3\times 6-1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3\times 6-1} + \frac{1}{6\times(3\times 6-1)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{17} + \frac{1}{102}$

El siguiente algoritmo verifica si un número racional n es o no una suma de no más de 3 fracciones unitarias:

Algoritmo de Erdös-Straus

```
es(n)={local(x,y,s,t);
      for(x=ceil(1/n), floor(3/n), s=n-1/x; if(s==0,return([x]));
              for(y=ceil(1/s), floor(2/s), t=s-1/y; if(t==0,return([x,y]));
                  if(numerator(t)==1,return([x,y,1/t]));
                  );
          );
   }
```

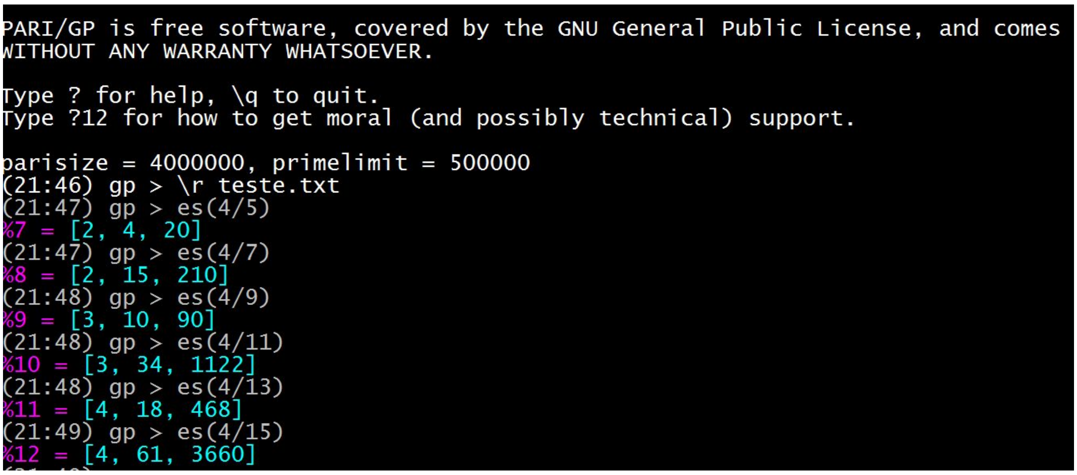
Este algoritmo funciona del siguiente modo:

1. Digamos que $n = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (donde $\frac{1}{y}$ y $\frac{1}{z}$ pueden no existir) con $x \le y \le z$. Como entonces $\frac{1}{z} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$, se tiene que $\frac{1}{x} \le n \le \frac{3}{x}$, lo que es equivalente a $\frac{1}{n} \le x \le \frac{3}{n}$.
   Así se busca x en el intervalo $\lceil \frac{1}{n} \rceil, \lceil \frac{1}{n} \rceil + 1, \ldots, \lceil \frac{3}{n} \rceil$, se hace $s = n - \frac{1}{x}$ y si $s = 0$ entonces $n = \frac{1}{x}$.

2. Si $s \neq 0$ se busca y, z tales que $s = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ $(y \leq z)$. Como se ha hecho arriba, se tiene $\frac{1}{y} \leq s \leq \frac{2}{y}$, y por lo tanto $\frac{1}{s} \leq y \leq \frac{2}{s}$. Si busca así y en el intervalo $\lceil \frac{1}{s} \rceil, \lceil \frac{1}{s} \rceil + 1, \ldots, \lceil \frac{2}{s} \rceil$.
   Se hace $t = s - \frac{1}{y}$. Si $t = 0$, entonces $n = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; si el numerador de t es igual a 1, entonces $n = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + t$ y si el numetador de t es diferente de cero y se tiene $t \neq 1$, se repite los procedimientos anteriores, recorriendo todos los posibles valores de x y y.

   Ejemplo:
   Si $n = \frac{4}{5}$, calculamos $\lceil \frac{5}{4} \rceil = 2$ y por lo tanto se van a intentar $n = 1, 2$. Se tiene $s = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$, por lo tanto $\frac{3}{10}$ es la nueva fracción.
   Como $\lceil \frac{10}{3} \rceil = 4$ entonces $t = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$, y por lo tanto el procedimiento termina, y el resultado final es $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$.

Algunos ejemplos de resultados obtenidos con PARI/GP para las fracciones de la forma $\frac{4}{n}$.



```
PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and comes
WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.

Type ? for help, \q to quit.
Type ?12 for how to get moral (and possibly technical) support.

parisize = 4000000, primelimit = 500000
(21:46) gp > \r teste.txt
(21:47) gp > es(4/5)
%7 = [2, 4, 20]
(21:47) gp > es(4/7)
%8 = [2, 15, 210]
(21:48) gp > es(4/9)
%9 = [3, 10, 90]
(21:48) gp > es(4/11)
%10 = [3, 34, 1122]
(21:48) gp > es(4/13)
%11 = [4, 18, 468]
(21:49) gp > es(4/15)
%12 = [4, 61, 3660]
```

Figura 6.2: Ejemplos de verificación de la conjetura Erdös-Straus con PARI/GP

Capítulo 7

CONCLUCIÓN

Sintetizaré ahora con unos breves comentarios lo que se pretendo con este trabajo. Aunque este trabajo es corta y concisa, por lo tanto no puede nombrar todos los matemáticos que dieron contribuciones en la evolución del proceso de desecomposición con fracciones unitarias que los egipcios desarrollaron en la matemática, creo que se abordaron los aspectos y las etapas más importantes de esta evolución matemática.

Es importante tener en cuenta que a veces la aparición de empleos que se perdieron o parcialmente destruidas vienen a cuestionar creencias muy arraigadas, y frases como “este matemático fue el primero” ya no tiene sentido. A pesar de ello, estos matemáticos no son sin mérito.

Como mencioné en la introducción, siempre los matemáticos desde la antigüedad seguián en la búsqueda de la interpretación y trataron de traducir las obras originales de autores egipcios, principalmente el papiro conocido como Papiro de Rhind y otros documentos matemáticos, incluyendo desde el desciframiento de la Piedra Rosetta por Jean François Chambollion y los documentos dejados por la civilización egipcia así como la traducciones de Gillings y Chace otros investigadores egiptólogos.

Analizando el aspecto pedagógico en relación con mi trabajo como profesor de enseñanza secundaria, creo que con este trabajo, y su analisis de los textos dejados por estos antiguos matemáticos egipcios se podrían decir en parte, las dificultades que presentaban a la hora de emplear en su vioda cotidiana por los autores de aquella época. Puede ser similares a aquellos nuestros estudiantes, por ejemplo, trabajar con fracciones se enfrentan desafíos. También conocé mucho mejor la historia de las matemáticas, y esos conocimientos, cuando se aplica en su momento, pueden ser un incentivo para nuestros estudiantes cuando les estamos enseñando en los diferentes temas.

BIBLIOGRAFÍA

[Asimov, 1993] Asimov, I. (1993). *Historia de los Egipcios.* Alianza Editorial.

[Blackman and Davies, 1988] Blackman, A. M. and Davies, W. V. (1988). *The story of king Kheops and the magicians: transcribed from papyrus Westcar (Berlin Papyrus 3033).* JV Books.

[Chace and Clare, 1979] Chace, A. B. and Clare, R. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus,* volume volumen 1. Mathematical Association of America.

[Estrada et al., 2000] Estrada, M., Correia, C., Filipe, J., Céu, M., and Costa, J. (2000). *História da matemática.* Universidade Aberta.

[Eves, 1964] Eves, H. (1964). *An introduction to the History of Mathematics.* Holt, Rinehart and Winston.

[Fibonacci and Sigler, 2003] Fibonacci, L. and Sigler, L. (2003). *Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation.* Springer Science.

[Flavio, 1994] Flavio, J. (1994). *Contra Apión.* Editorial Credos S.A.

[Gillings, 1972] Gillings, R. J. (1972). *Mathematics in the Time of the Pharaohs.* Dover.

[Guinnes, 1994] Guinnes, G. (1994). *Companion enciclopedia of the history and fhiosophy of the mathematical sciences.* London, Routledge.

[Ifrah, 1994] Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres.* R. Laffont.

[Ifrah et al., 2000] Ifrah, G., Harding, Frank, E., Bellos, David, and ans Sophie, W. (2000). *The universal history of computing.* John Wiley.

[Moreno, 2012] Moreno, R. (2012). *Las Matemáticas de los Faraones.* Nivola Libros ediciones, S.L.

[Moreno Castillo, 2007] Moreno Castillo, R. (2007). *Fibonacci : El primer matemático medieval.* Nivola.

[Neugebauer, 1969a] Neugebauer, O. (1969a). *The exact sciences in antiquity*, volume 2. Dover editions.

[Neugebauer, 1969b] Neugebauer, O. (1969b). *The exact sciences in antiquity*, volume 9. Courier Corporation.

[Robins and Shute, 1987] Robins, G. and Shute, C. (1987). The Rhind mathematical papyrus. an ancient Egyptian text.

[Smith, 2012] Smith, K. T. (2012). *Primer of modern analysis: directions for knowing all dark things, Rhind papyrus, 1800 BC.* Springer Science.

[Suzuki, 2002] Suzuki, J. (2002). *A History of Mathematics.* Prentice Hall.

[Thomas, 1931] Thomas, W. (1931). Moscow mathematical papyrus, no. 14. *The Journal of Egyptian Archaeology*, pages 50–52.

REFERENCIAS DE PÁGINAS WEB

[1] Ron, Knott Egyptian Fractions, 1996. http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html#section7, [consultado 21 de Enero. 2015]

[2] Francisco Martín V. La Matemática en antiguo Egipto, 2003. http://www.egiptologia.cl/difusion/ciencia_matematicas.php, [consultado 24 de Marzo 2015]

[3] Had2Know, Egyptian Fractions Calculator, 2010. http://www.had2know.com/academics/egyptian-fraction-calculator.html, [consultado 20 de noviembre 2014].

[4] Carlos Maza Gómez, Matemáticas en la Antigüedad, 2002. http://personal.us.es/cmaza/egipto/fracciones.htm, [consultado 10 de Marzo 2015]